Vecindades uniformes de conjuntos en espacios métricos

Objetivos. Estudiar propiedades elementales del conjunto

$$V(A,r) \coloneqq \Big\{ x \in X\colon\ \inf_{a\in A} d(a,x) < r \Big\},$$

donde A es un subconjunto del espacio métrico X y $r > 0$.

Prerrequisitos. Bolas en espacios métricos, el ínfimo de una función, la distancia de un punto a un conjunto, la unión de una familia de conjuntos.

1 Definición (repaso: la distancia de un punto a un conjunto)**.** Sean (X,d) un espacio métrico, $A \subseteq X$. Definimos $D_A\colon X \to [0,+\infty]$,

$$D_A(x) \coloneqq \inf_{a\in A} d(x,a).$$

2 Ejercicio. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ tal que $A \neq \varnothing$. Demostrar que la función D_A es Lipschitz continua con coeficiente 1, esto es, para cada x, y en X,

$$|D_A(x) - D_A(y)| \le d(x,y).$$

3 Definición (vecindades uniformes de un conjunto)**.** Sean (X,d) un espacio métrico, $A \subseteq X$, $r > 0$. Pongamos

$$V(A,r) \coloneqq \big\{ x \in X\colon\ D_A(x) < r \big\}.$$

4 Proposición (descripciones equivalentes de las vecindades uniformes de un conjunto)**.** *Sean (X,d) un espacio métrico, $A \subseteq X$, $r > 0$. Entonces*

$$V(A,r) = \big\{ x \in X\colon\quad \exists a \in A \quad d(x,a) < r \big\} = \bigcup_{a\in A} B(a,r).$$

Demostración. Sea $x \in X$. Aplicamos una propiedad del ínfimo y la definición de la bola abierta:

$$\begin{aligned} D_A(x) < r \quad &\iff \quad \inf_{a\in A} d(x,a) < r \quad \iff \quad \exists a \in A \quad d(x,a) < r \\ &\iff \quad \exists a \in A \quad x \in B(a,r) \quad \iff \quad x \in \bigcup_{a\in A} B(a,r). \end{aligned}$$ □

5 Proposición. *Sean* (X, d) *un espacio métrico,* $A \subseteq X$*,* $r > 0$*. Entonces* $V(A, r) \in \tau_d$ *y* $A \subseteq V(A, r)$*.*

Idea de primera demostración. Para $A \neq \varnothing$, de la continuidad de la función D_A se sigue que $V(A, r)$ es abierto. Además, para x en A tenemos $D_A(x) = 0$. □

Idea de segunda demostración. Se sigue de la fórmula $V(A, r) = \bigcup_{a \in A} B(a, r)$. Cada bola $B(a, r)$ es abierta y contiene el punto a. □

6 Proposición. *Sean* (X, d) *un espacio métrico,* $A \subseteq X$*,* $r_1, r_2 > 0$*,* $r_1 < r_2$*. Entonces* $V(A, r_1) \subseteq V(A, r_2)$*.*

Demostración. Ejercicio. □

7 Proposición. *Sean* (X, d) *un espacio métrico,* $P \subseteq Q \subseteq X$*,* $r > 0$*. Entonces* $V(P, r) \subseteq V(Q, r)$*.*

Demostración. Ejercicio. □

8 Ejercicio. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Demostrar que

$$\operatorname{cl}(A) = \bigcap_{r > 0} V(A, r).$$

9 Ejercicio. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A_1, A_2 \subseteq X$, $r > 0$. Demostrar que

$$V(A_1 \cup A_2, r) = V(A_1, r) \cup V(A_2, r).$$