Convergencia uniforme (un tema de análisis real)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

14 de mayo de 2024

Objetivos:

- repasar la definición de la convergencia uniforme;
- compararla con la convergencia puntual;
- describir la convergencia uniforme en términos de la norma-supremo;
- describir la convergencia uniforme en términos de los "conjuntos de no cercanía":

$$A(\varepsilon, n) := \Big\{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \ge \varepsilon\Big\}, \qquad B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n \ge k} A(\varepsilon, n),$$

Prerrequsitos:

- la definición del límite;
- la definición de la convergencia puntual de una sucesión de funciones;
- la norma-supremo;
- los conjuntos $A(\varepsilon, n)$, $B(\varepsilon, k)$ y sus propiedades.

Plan

Plan

1. Convergencia puntual y uniforme
2. La convergencia uniforme y la seminorma-supremo
3. Criterio en términos de $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

Sucesión de funciones

En este tema vamos a considerar una sucesión de funciones complejas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas en un conjunto X:

$$f_n\colon X \to \mathbb{C}.$$

En otras palabras, para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $f_n \in \mathbb{C}^X$.

Notación breve: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^X)^{\mathbb{N}}$.

También vamos a suponer que $g\colon X \to \mathbb{C}$.

Definiciones de la convergencia puntual y uniforme

Definición de la convergencia puntual (en todo el dominio X):

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \forall x \in X \qquad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x).$$

Definiciones de la convergencia puntual y uniforme

Definición de la convergencia puntual (en todo el dominio X):

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall x \in X \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x).$$

Escribimos lo mismo con 4 cuantificadores:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Definición (convergencia uniforme)

$$f_n \overset{X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} g \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Comparación de la convergencia uniforme con la convergencia puntual

Proposición

Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^X)^{\mathbb{N}}$ y $g \in \mathbb{C}^X$ tales que

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g.$$

Entonces,

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g.$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
&\implies \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
&\iff \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g.
\end{aligned}
$$

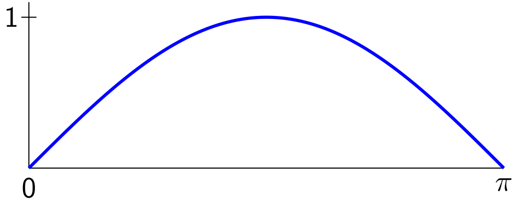
Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

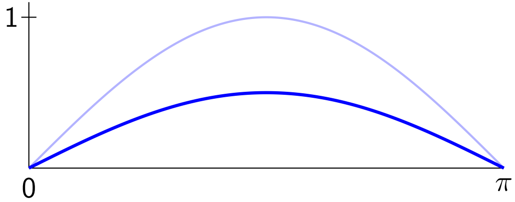
f_1



Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

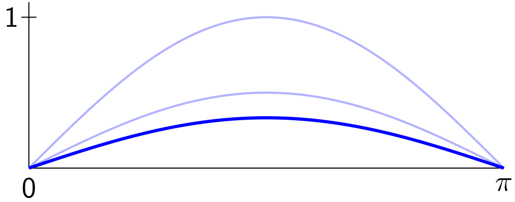
f_2



Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

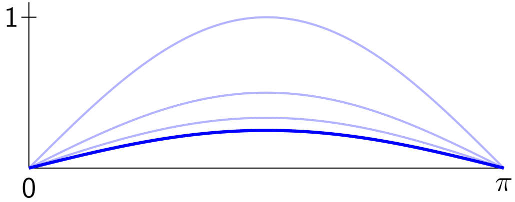
f_3



Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

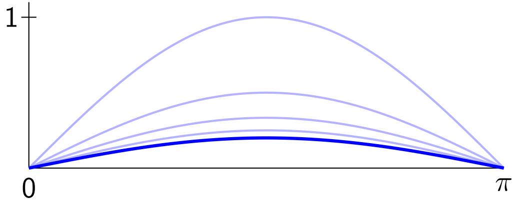
f_4



Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

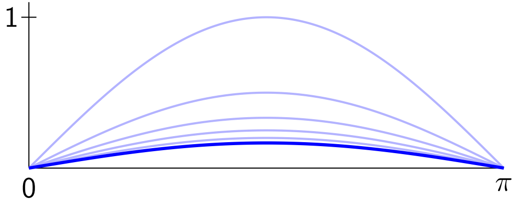
f_5



Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

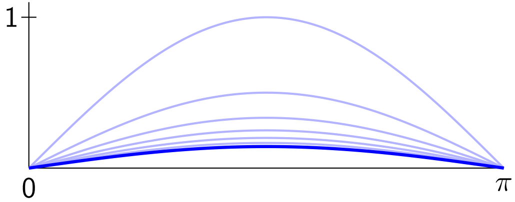
f_6



Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

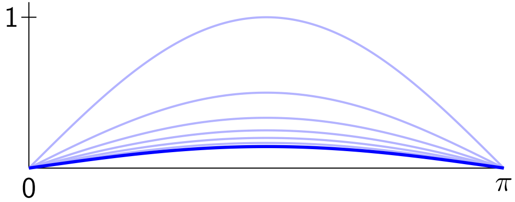
f_7



Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

f_8



Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$.

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$k := \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1.$$

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$k := \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1.$$

Entonces, para cada $n \geq k$ y cada x en $[0, \pi]$, tenemos que

$$|f_n(x) - g(x)|$$

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$k := \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1.$$

Entonces, para cada $n \geq k$ y cada x en $[0, \pi]$, tenemos que

$$|f_n(x) - g(x)| =$$

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$k := \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1.$$

Entonces, para cada $n \ge k$ y cada x en $[0, \pi]$, tenemos que

$$|f_n(x) - g(x)| = \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{n}$$

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$k := \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1.$$

Entonces, para cada $n \ge k$ y cada x en $[0, \pi]$, tenemos que

$$|f_n(x) - g(x)| = \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{n} \le$$

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$k := \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1.$$

Entonces, para cada $n \geq k$ y cada x en $[0, \pi]$, tenemos que

$$|f_n(x) - g(x)| = \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$k := \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1.$$

Entonces, para cada $n \ge k$ y cada x en $[0, \pi]$, tenemos que

$$|f_n(x) - g(x)| = \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{n} \le \frac{1}{n} \le$$

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$k := \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1.$$

Entonces, para cada $n \geq k$ y cada x en $[0, \pi]$, tenemos que

$$|f_n(x) - g(x)| = \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k}$$

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$k := \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1.$$

Entonces, para cada $n \ge k$ y cada x en $[0, \pi]$, tenemos que

$$|f_n(x) - g(x)| = \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{n} \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{k} <$$

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$k := \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1.$$

Entonces, para cada $n \geq k$ y cada x en $[0, \pi]$, tenemos que

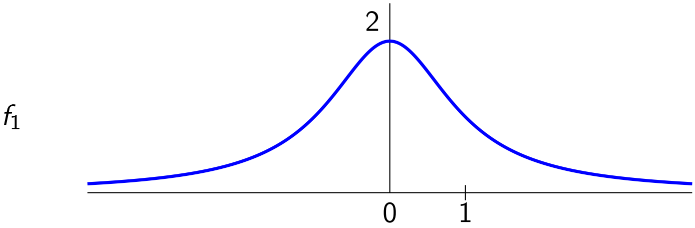
$$|f_n(x) - g(x)| = \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

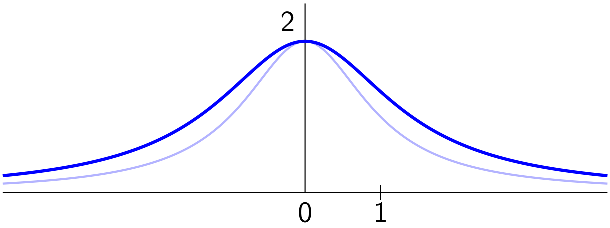
$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$



Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

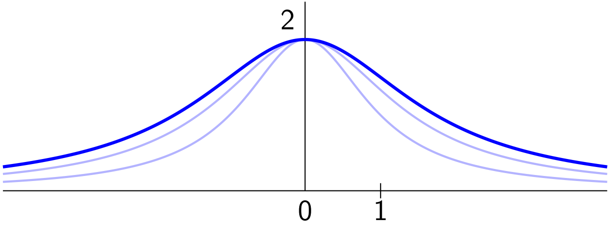
f_2



Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

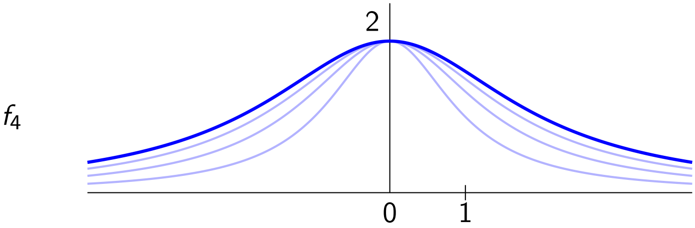
$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

f_3



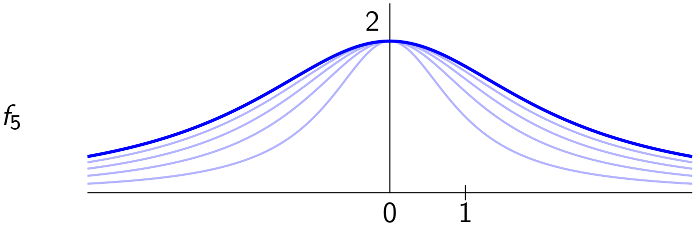
Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$



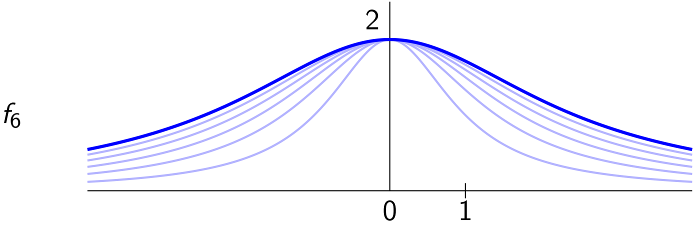
Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$



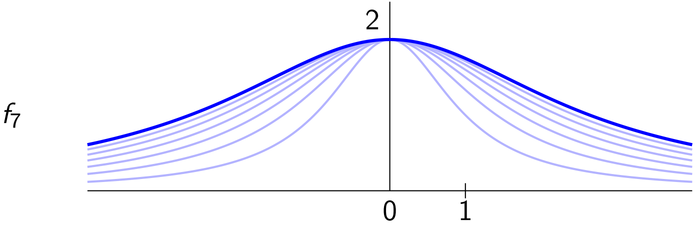
Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$



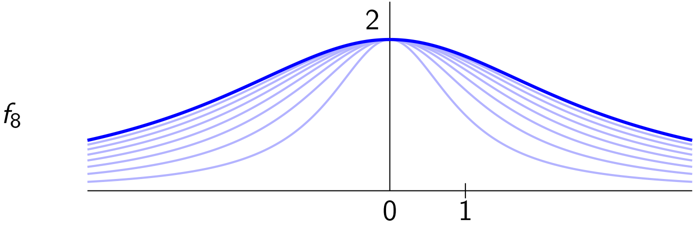
Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$



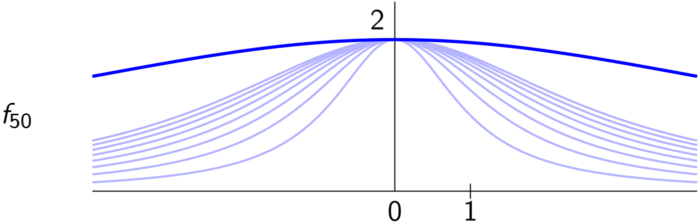
Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$



Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$



Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Obviamente, para cada x en $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1 + \frac{x^2}{n}} = 2.$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

$$\exists \varepsilon > 0$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \exists n \geq k$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \exists n \geq k \qquad \exists x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \exists n \geq k \qquad \exists x \in \mathbb{R} \qquad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon.$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \exists n \geq k \qquad \exists x \in \mathbb{R} \qquad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Dado k en $\mathbb{N}$, pongamos $n := k$, $x := \sqrt{k}$.

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \exists n \geq k \qquad \exists x \in \mathbb{R} \qquad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Dado k en $\mathbb{N}$, pongamos $n := k$, $x := \sqrt{k}$.

Entonces, $f_n(x) = f_k(\sqrt{k}) = 1$ y

$$|f_n(x) - g(x)| =$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \exists n \geq k \qquad \exists x \in \mathbb{R} \qquad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Dado k en $\mathbb{N}$, pongamos $n := k$, $x := \sqrt{k}$.
Entonces, $f_n(x) = f_k(\sqrt{k}) = 1$ y

$$|f_n(x) - g(x)| = |1 - 2| = 1 \geq \varepsilon.$$

Plan

1. Convergencia puntual y uniforme
2. La convergencia uniforme y la seminorma-supremo
3. Criterio en términos de $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

La seminorma-supremo

Sea X un conjunto. Definimos $N_{\sup}\colon \mathbb{C}^X \to [0, +\infty]$,

$$N_{\sup}(f) := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

La seminorma-supremo

Sea X un conjunto. Definimos $N_{\text{sup}}\colon \mathbb{C}^X \to [0, +\infty]$,

$$N_{\text{sup}}(f) := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Es fácil ver que N_{sup} tiene las siguientes propiedades:

- es subaditiva;
- es absolutamente homogénea;
- para cada f en $\mathbb{C}^X$, si $N_{\text{sup}}(f) = 0$, entonces $f = 0_X$.

La seminorma-supremo

Sea X un conjunto. Definimos $N_{\sup}\colon \mathbb{C}^X \to [0, +\infty]$,

$$N_{\sup}(f) := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Es fácil ver que $N_{\sup}$ tiene las siguientes propiedades:

- es subaditiva;
- es absolutamente homogénea;
- para cada f en $\mathbb{C}^X$, si $N_{\sup}(f) = 0$, entonces $f = 0_X$.

En general, no podemos afirmar que $N_{\sup}$ es una norma, porque

La seminorma-supremo

Sea X un conjunto. Definimos $N_{\sup}\colon \mathbb{C}^X \to [0, +\infty]$,

$$N_{\sup}(f) := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Es fácil ver que $N_{\sup}$ tiene las siguientes propiedades:

- es subaditiva;
- es absolutamente homogénea;
- para cada f en $\mathbb{C}^X$, si $N_{\sup}(f) = 0$, entonces $f = 0_X$.

En general, no podemos afirmar que $N_{\sup}$ es una norma, porque puede tomar el valor $+\infty$.

La norma-supremo

Sea X un conjunto.

Denotamos por $B(X)$ al conjunto de todas las funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$.

La norma-supremo

Sea X un conjunto.

Denotamos por $B(X)$ al conjunto de todas las funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$.

Definimos $\|\cdot\|_{\sup}\colon B(X) \to [0, +\infty)$,

$$\|f\|_{\sup} := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

La norma-supremo

Sea X un conjunto.

Denotamos por $B(X)$ al conjunto de todas las funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$.

Definimos $\|\cdot\|_{\sup}\colon B(X) \to [0, +\infty)$,

$$\|f\|_{\sup} := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

En otras palabras, $\|\cdot\|_{\sup}$ es la restricción de $N_{\sup}$ al conjunto $B(X)$.

También restringimos el codominio, de $[0, +\infty]$ a $[0, +\infty)$.

La norma-supremo

Sea X un conjunto.

Denotamos por $B(X)$ al conjunto de todas las funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$.

Definimos $\|\cdot\|_{\sup}\colon B(X) \to [0, +\infty)$,

$$\|f\|_{\sup} := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

En otras palabras, $\|\cdot\|_{\sup}$ es la restricción de $N_{\sup}$ al conjunto $B(X)$.

También restringimos el codominio, de $[0, +\infty]$ a $[0, +\infty)$.

Sabemos que $B(X)$ con la norma $\|\cdot\|_{\sup}$ es un espacio de Banach.

Convergencia uniforme en términos de la seminorma-supremo

Proposición

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^X)^{\mathbb{N}}$ y sea $g \in \mathbb{C}^X$. Entonces,

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} N_{\sup}(f_n - g) = 0.$$

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g$. Queremos demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} N_{\sup}(f_n - g) = 0$.

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g$. Queremos demostrar que $\lim_{n\to\infty} N_{\sup}(f_n - g) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g$. Queremos demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} N_{\sup}(f_n - g) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pasando al supremo perdemos la desigualdad estricta:

$$\forall n \geq k$$

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g$. Queremos demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} N_{\sup}(f_n - g) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pasando al supremo perdemos la desigualdad estricta:

$$\forall n \geq k \qquad \sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demostración, $\Rightarrow$

Supongamos que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g$. Queremos demostrar que $\lim_{n\to\infty} N_{\sup}(f_n - g) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pasando al supremo perdemos la desigualdad estricta:

$$\forall n \geq k \qquad \sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Usamos el hecho que $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$: $\qquad \forall n \geq k \qquad N_{\sup}(f_n - g) < \varepsilon.$

Demostración, $\Leftarrow$

Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} N_{\sup}(f_n - g) = 0$.

Demostración, $\Leftarrow$

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} N_{\sup}(f_n - g) = 0$.

Queremos demostrar que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g$.

Demostración, $\Leftarrow$

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} N_{\sup}(f_n - g) = 0$.

Queremos demostrar que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que

Demostración, $\Leftarrow$

Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} N_{\sup}(f_n - g) = 0$.

Queremos demostrar que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq k \qquad N_{\sup}(f_n - g) < \varepsilon.$$

Demostración, $\Leftarrow$

Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} N_{\sup}(f_n - g) = 0$.

Queremos demostrar que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq k \qquad N_{\sup}(f_n - g) < \varepsilon.$$

Por la definición de sup, esto implica que

Demostración, $\Leftarrow$

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} N_{\sup}(f_n - g) = 0$.

Queremos demostrar que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq k \qquad N_{\sup}(f_n - g) < \varepsilon.$$

Por la definición de sup, esto implica que

$$\forall n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - g(x)| \leq N_{\sup}(f_n - g) < \varepsilon.$$

Ejemplo 1, análisis con la norma-supremo

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

Ejemplo 1, análisis con la norma-supremo

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

En este ejemplo,

$$|f_n(x) - g(x)| = f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$, la función f_n alcanza su máximo en el punto

Ejemplo 1, análisis con la norma-supremo

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

En este ejemplo,

$$|f_n(x) - g(x)| = f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$, la función f_n alcanza su máximo en el punto $\frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 1, análisis con la norma-supremo

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

En este ejemplo,

$$|f_n(x) - g(x)| = f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$, la función f_n alcanza su máximo en el punto $\frac{\pi}{2}$.

Por eso

$$\|f_n - g\|_{\sup} =$$

Ejemplo 1, análisis con la norma-supremo

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

En este ejemplo,

$$|f_n(x) - g(x)| = f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$, la función f_n alcanza su máximo en el punto $\frac{\pi}{2}$.

Por eso

$$\|f_n - g\|_{\sup} = f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n}.$$

Ejemplo 1, análisis con la norma-supremo

$$X = [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}, \qquad g(x) = 0.$$

En este ejemplo,

$$|f_n(x) - g(x)| = f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$, la función f_n alcanza su máximo en el punto $\frac{\pi}{2}$.

Por eso

$$\|f_n - g\|_{\sup} = f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - g\|_{\sup} = 0$, concluimos que $f_n \xrightarrow[]{[0,\pi]} g$.

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)|$$

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = 2 - \frac{2n}{n + x^2}$$

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = 2 - \frac{2n}{n + x^2} = \frac{2x^2}{n + x^2}.$$

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = 2 - \frac{2n}{n + x^2} = \frac{2x^2}{n + x^2}.$$

Como h_n es par y creciente,

$$\|h_n\|_{\sup} =$$

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n+x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = 2 - \frac{2n}{n+x^2} = \frac{2x^2}{n+x^2}.$$

Como h_n es par y creciente,

$$\|h_n\|_{\sup} = \sup_{x\in[0,+\infty)} |h_n(x)| =$$

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = 2 - \frac{2n}{n + x^2} = \frac{2x^2}{n + x^2}.$$

Como h_n es par y creciente,

$$\|h_n\|_{\sup} = \sup_{x \in [0, +\infty)} |h_n(x)| = \lim_{x \to +\infty} h_n(x) = 2.$$

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = 2 - \frac{2n}{n + x^2} = \frac{2x^2}{n + x^2}.$$

Como h_n es par y creciente,

$$\|h_n\|_{\sup} = \sup_{x \in [0, +\infty)} |h_n(x)| = \lim_{x \to +\infty} h_n(x) = 2.$$

Resumen: $\|f_n - g\|_{\sup} = 2$ para cada n.

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = 2 - \frac{2n}{n + x^2} = \frac{2x^2}{n + x^2}.$$

Como h_n es par y creciente,

$$\|h_n\|_{\sup} = \sup_{x \in [0,+\infty)} |h_n(x)| = \lim_{x \to +\infty} h_n(x) = 2.$$

Resumen: $\|f_n - g\|_{\sup} = 2$ para cada n. Esta sucesión no tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

Ejercicio. Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ y sea $a \in X$. Muestre que

$$|f(a)| \le N_{\sup}(f).$$

Ejercicio. Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^X)^{\mathbb{N}}$, $g \in \mathbb{C}^X$, $a \in X$. Muestre que

$$|f_n(a) - g(a)| \le N_{\sup}(f_n - g).$$

Ejercicio. Usando el resultado del ejercicio anterior muestre que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual.

Plan

Definición de los “conjuntos de no cercanía”

Sean X un conjunto, $f_n\colon X \to \mathbb{C}$ para cada n en $\mathbb{N}$, $g\colon X \to \mathbb{C}$.

Definimos

$$A(\varepsilon, n) := \left\{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\right\},$$

$$B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n),$$

$$C(\varepsilon) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k),$$

$$D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon).$$

D es el conjunto de no convergencia

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

D es el conjunto de no convergencia

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Luego

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x) \qquad \iff$$

D es el conjunto de no convergencia

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Luego

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x) \qquad \iff \qquad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon$$

D es el conjunto de no convergencia

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Luego

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x) \qquad \iff \qquad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon$$

$$\iff \qquad x \in \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A(\varepsilon, n)$$

D es el conjunto de no convergencia

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Luego

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \in \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A(\varepsilon, n) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in D.$$

D es el conjunto de no convergencia

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \quad\iff\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Luego

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x) \quad\iff\quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon$$

$$\iff\quad x \in \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A(\varepsilon, n) \quad\iff\quad x \in D.$$

Proposición (D es el conjunto de no convergencia)

$$\{x \in X\colon\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x)\} = D.$$

Criterio de convergencia puntual en términos del conjunto D

Proposición

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad D = \varnothing.$$

Criterio de convergencia uniforme en términos de $B(\varepsilon, k)$

Proposición

$$f \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, k) = \varnothing.$$

Demostración.

$$f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \qquad \Longleftrightarrow$$

Demostración.

$$f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Demostración.

$$f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\iff
\end{aligned}
$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
f_n \xrightarrow[]{X} g \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n)
\end{aligned}
$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\iff
\end{aligned}
$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(\exists n \geq k \quad x \in A(\varepsilon, n))
\end{aligned}
$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(\exists n \geq k \quad x \in A(\varepsilon, n)) \\
&\iff
\end{aligned}
$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg\big(\exists n \geq k \quad x \in A(\varepsilon, n)\big) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg\big(x \in B(\varepsilon, k)\big)
\end{aligned}
$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(\exists n \geq k \quad x \in A(\varepsilon, n)) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(x \in B(\varepsilon, k)) \\
&\Longleftrightarrow
\end{aligned}
$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \quad & \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
& \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
& \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
& \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(\exists n \geq k \quad x \in A(\varepsilon, n)) \\
& \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(x \in B(\varepsilon, k)) \\
& \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad x \notin B(\varepsilon, k)
\end{aligned}
$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
f_n \xrightarrow{X} g \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg\big(\exists n \geq k \quad x \in A(\varepsilon, n)\big) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg\big(x \in B(\varepsilon, k)\big) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad x \notin B(\varepsilon, k) \\
&\iff
\end{aligned}
$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg\big(\exists n \geq k \quad x \in A(\varepsilon, n)\big) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg\big(x \in B(\varepsilon, k)\big) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad x \notin B(\varepsilon, k) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) = \varnothing.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \qquad g(x) = 2, \qquad h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \frac{2x^2}{n + x^2}.$$

$$\begin{aligned} x \in A(\varepsilon, n) \quad &\Longleftrightarrow \quad h_n(x) \geq \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 \geq \varepsilon\, x^2 + \varepsilon\, n \\ &\Longleftrightarrow \quad (2 - \varepsilon)x^2 \geq \varepsilon n. \end{aligned}$$

Luego

$$A(\varepsilon, n) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & \varepsilon \leq 2; \\ \varnothing, & \varepsilon > 2. \end{cases}$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$A(\varepsilon, n) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}}\,\right] \cup \left[\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$A(\varepsilon, n) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}}\,\right] \cup \left[\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

En este ejemplo, para cada ε fijo, la sucesión $(A(\varepsilon, n))_{n\in\mathbb{N}}$ es

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$A(\varepsilon, n) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

En este ejemplo, para cada ε fijo, la sucesión $(A(\varepsilon, n))_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente. Por eso

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n) =$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$A(\varepsilon, n) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

En este ejemplo, para cada ε fijo, la sucesión $(A(\varepsilon, n))_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente. Por eso

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n) = A(\varepsilon, k).$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

En particular, para $\varepsilon = 1$,

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, k) = (-\infty, -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}, +\infty) \neq \varnothing.$$

Hemos comprobado que no se tiene la convergencia uniforme.

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}\,\right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2 - \varepsilon}}$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} =$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} = +\infty.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, no hay ningún punto que pertenezca a todos los conjuntos $B(\varepsilon, k)$:

$$C(\varepsilon)$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}\,\right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2 - \varepsilon}} = +\infty.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, no hay ningún punto que pertenezca a todos los conjuntos $B(\varepsilon, k)$:

$$C(\varepsilon) =$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} = +\infty.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, no hay ningún punto que pertenezca a todos los conjuntos $B(\varepsilon, k)$:

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k) =$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} = +\infty.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, no hay ningún punto que pertenezca a todos los conjuntos $B(\varepsilon, k)$:

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k) = \varnothing.$$

Finalmente, $\quad D$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} = +\infty.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, no hay ningún punto que pertenezca a todos los conjuntos $B(\varepsilon, k)$:

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k) = \varnothing.$$

Finalmente, $\quad D =$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} = +\infty.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, no hay ningún punto que pertenezca a todos los conjuntos $B(\varepsilon, k)$:

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k) = \varnothing.$$

Finalmente, $D = \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon)$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} = +\infty.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, no hay ningún punto que pertenezca a todos los conjuntos $B(\varepsilon, k)$:

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k) = \varnothing.$$

Finalmente, $\quad D = \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon) =$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} = +\infty.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, no hay ningún punto que pertenezca a todos los conjuntos $B(\varepsilon, k)$:

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k) = \varnothing.$$

Finalmente, $\quad D = \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon) = \varnothing.$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty\right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} = +\infty.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, no hay ningún punto que pertenezca a todos los conjuntos $B(\varepsilon, k)$:

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k) = \varnothing.$$

Finalmente, $D = \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon) = \varnothing$. Hemos comprobado que $f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} g$.

Ejercicio.

Demostrar que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, razonando en términos de $B(\varepsilon, k)$, $C(\varepsilon)$ y D.

Proposición (criterio de convergencia uniforme fuera de un conjunto)

Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^X)^{\mathbb{N}}$, $g \in \mathbb{C}^X$, $Y \subseteq X$. Entonces,

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X\setminus Y} g \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, k) \subseteq Y.$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[]{X \setminus Y} g$$

$$\iff$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[\quad]{X \setminus Y} g$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[]{X \setminus Y} g$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[]{X \setminus Y} g$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(\qquad \Rightarrow \qquad \Big)$$

Demostración.

$$f_n \xRightarrow{X\setminus Y} g$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \notin Y \quad \Rightarrow \quad x \notin A(\varepsilon, n)\Big)$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \notin Y \quad \Rightarrow \quad x \notin A(\varepsilon, n)\Big)$$

$$\iff$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[]{X\setminus Y} g$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \notin Y \quad \Rightarrow \quad x \notin A(\varepsilon, n)\Big)$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(\qquad \Rightarrow \qquad \Big)$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[]{X \setminus Y} g$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \notin Y \quad \Rightarrow \quad x \notin A(\varepsilon, n) \Big)$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \in A(\varepsilon, n) \quad \Rightarrow \quad x \in Y \Big)$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X\setminus Y} g$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \notin Y \quad \Rightarrow \quad x \notin A(\varepsilon, n)\Big)$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \in A(\varepsilon, n) \quad \Rightarrow \quad x \in Y\Big)$$

$$\iff$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X\setminus Y} g$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \notin Y \quad \Rightarrow \quad x \notin A(\varepsilon, n)\Big)$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \in A(\varepsilon, n) \quad \Rightarrow \quad x \in Y\Big)$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[\longrightarrow]{X \setminus Y} g$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \notin Y \quad \Rightarrow \quad x \notin A(\varepsilon, n)\Big)$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \in A(\varepsilon, n) \quad \Rightarrow \quad x \in Y\Big)$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

$$\iff$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \notin Y \quad \Rightarrow \quad x \notin A(\varepsilon, n)\Big)$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \in A(\varepsilon, n) \quad \Rightarrow \quad x \in Y\Big)$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[\quad]{X\setminus Y} g$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \notin Y \quad \Rightarrow \quad x \notin A(\varepsilon, n)\Big)$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \in A(\varepsilon, n) \quad \Rightarrow \quad x \in Y\Big)$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

$$\iff$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[]{X\setminus Y} g$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \notin Y \quad \Rightarrow \quad x \notin A(\varepsilon, n)\Big)$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \Big(x \in A(\varepsilon, n) \quad \Rightarrow \quad x \in Y\Big)$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) \subseteq Y.$$

Hemos estudiado el concepto de la convergencia uniforme.

Es uno de varios modos de convergencia.