Convergencia uniforme:
propiedades de la función límite

Este tema usa la noción de *convergencia uniforme*.

1. Teorema (cambio de límites cuando uno de ellos es uniforme). Sean X y Y espacios métricos, $D \subseteq X$, $x_0 \in \operatorname{clos}(D)$, $f_n \colon X \to Y$. Supóngase que:

i) $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} g$;

ii) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) =: A_n$;

iii) $\exists \lim\limits_{n \to \infty} A_n = A$.

Entonces $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$.

$$
\begin{tikzcd}
f_n(x) \arrow[r, "x\to x_0"] \arrow[d, "n\to\infty"'] & A_n \arrow[d, "x\to x_0"] \\
g(x) \arrow[r, "n\to\infty"', red] & A
\end{tikzcd}
$$

2. Teorema (cambio de límites cuando uno de ellos es uniforme y el codominio es completo). Sea X un espacio métrico y Y un espacio métrico completo, $D \subseteq X$, $x_0 \in \operatorname{clos}(D)$, $f_n \colon D \to Y$. Supóngase que:

i) $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} g$;

ii) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) =: A_n$;

Entonces los límites $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existen, y sus valores coinciden.

3. Teorema (continuidad de la función límite en un punto). Sean X y Y espacios métricos, $x_0 \in X$, $f_n \colon X \to Y$. Supóngase que:

- $f_n \overset{X}{\to} g$;
- para todo $n \in \mathbb{N}$, $\quad f_n$ es continua en el punto x_0.

Entonces g también es continua en x_0.

4. Teorema (continuidad de la función límite). Sean X y Y espacios métricos, $f_n \in C(X, Y)$. Supóngase que $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g$. Entonces $g \in C(X, Y)$.

5. Corolario. El espacio métrico $(C(X,Y),\rho)$ es completo.

6. Integración y límite uniforme. Sea X un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ de medida finita. Sean $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ y $g\colon X \to \mathbb{R}$ funciones integrables. Supóngase que

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,dx = \int\limits_X g(x)\,dx.$$

7. Teorema (derivación de la función límite en el caso de límite uniforme). Sean $X = [\alpha,\beta]$ y $f_n\colon X \to \mathbb{C}$. Supóngase que

i) las funciones f_n son derivables en X;

ii) $f_n' \overset{X}{\rightrightarrows} h$;

iii) $\exists x_0 \in [\alpha,\beta]$ tal que $\{f_n(x_0)\}$ es convergente.

Entonces:

1. $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g$;
2. g es derivable y $g'(x) = h(x)$ para todo $x \in X$.