Convergencia uniforme

Este tema usa las nociones de *desviación suprema* y *norma-supremo*.
Sean X, Y espacios métricos.

Definición (convergencia uniforme de una sucesión de funciones). Sean $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $X \to Y$, g una función $X \to Y$. Se dice que f_n *converge uniformemente a* g si

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, g) = 0.$$

1. Formular la definición anterior en el lenguaje de ε y δ. Comparar con la definición de convergencia puntual.

A veces se considera la convergencia uniforme en un *subconjunto* del dominio de definición:

Definición (convergencia uniforme de una sucesión de funciones en un conjunto). Sean $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $X \to Y$, g una función $X \to Y$, $X_1 \subset X$. Se dice que f_n *converge uniformemente a* g *en el conjunto* X_1 si la sucesión de restricciones $f_n|_X$ converge uniformemente a la restricción $g|_X$. En otras palabras, si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X_1} d(f(x), g(x)) = 0.$$

2. Relación entre la convergencia uniforme y la convergencia puntual. Mostrar que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual:

$$\text{si } f \overset{X}{\rightrightarrows} g, \text{ entonces } f \xrightarrow{X} g.$$

3. Criterio de Cauchy de la convergencia uniforme. Sean X un espacio métrico, Y un espacio métrico completo y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $X \to Y$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f_n converge uniformemente en X a una función $g\colon X \to Y$;

(b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad \|f_n - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

En otras palabras, el conjunto Y^X con la métrica ρ es un espacio métrico completo.

4. Teorema de Dini. Sea X un espacio métrico compacto, $f_n \in C(X, \mathbb{R})$, $g \in C(X, \mathbb{R})$. Supóngase que para todo $x \in X$ la sucesión $f_n(x)$ es monótona y para todo $x \in X$ se tiene $f_n(x) \to g(x)$ cuando $n \to \infty$. Entonces $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g$.

Esquema de investigación. Para considerar los siguientes ejemplos, se puede usar el siguiente esquema:

- calcular la función límite $g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$;

- calcular la norma $\|f_n - g\|$;
- checar si $\|f_n - g\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

A veces es suficiente obtener una estimación superior de $\|f_n - g\|$ (para demostrar que $\|f_n - g\| \to 0$) o una estimación inferior (para demostar que $\|f_n - g\| \not\to 0$).

Tarea: Para las siguientes sucesiones de funciones calcular la función límite y checar si tiene lugar la convergencia uniforme (usar la desviación suprema).

5. $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ es la la función lineal a trozos cuya gráfica une los puntos $(0,0)$, $(1/n, 1)$, $(2/n, 0)$, $(1,0)$.

6. $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x - x^n.$

7. $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$

8. $f_n \colon \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$

9. $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n}.$

10. $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}.$

11. $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}.$

12. $f_n \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}.$

13. $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n - x^{n+1}.$

14. $f_n \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right).$

15. $f_n \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}.$

16. $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}.$

17. $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}.$

18. $f_n \colon (1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}.$

19. $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}.$

20. $f_n \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \operatorname{arc\,tg} nx.$

21. $f_n \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x \operatorname{arc\,tg} nx.$
(Este ejemplo es un poco más complicado que los demás.)

22. $f_n \colon [0,2] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}.$