El principio de acotación uniforme
(el teorema de Banach–Steinhaus)

Objetivos. Demostrar el principio de acotación uniforme.

Prerrequisitos. Teorema de Baire, operadores lineales acotados en espacios normados.

El siguiente lema elemental aparece en un artículo de Alan D. Sokal, 2010.

1 Lema (acotación de la norma de una transformación lineal por medio de sus valores en una bola)**.** *Sean X, Y espacios normados, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $a \in X$, $r > 0$. Entonces*

$$\|T\| \le \frac{1}{r} \sup_{x \in C_X(a,r)} \|Tx\|_Y,$$

donde $C_X(a, r) \coloneqq \{x \in X\colon\ \|x - a\|_X \le r\}$.

Demostración. Denotemos el supremo en el lado derecho por M:

$$M \coloneqq \sup_{x \in C_X(a,r)} \|Tx\|_Y.$$

Recordemos que la norma de T se puede definir mediante la siguiente fórmula:

$$\|T\| = \sup_{u \in C_X(0_X,1)} \|Tu\|_Y.$$

El número M es el supremo de la misma función $x \mapsto \|Tx\|_Y$, pero sobre la bola $C_X(a, r)$.

Sea $u \in C_X(0_X, 1)$. Entonces $a + ru, a - ru \in C_X(a, r)$ y

$$u = \frac{1}{2r}\Big((a + ru) - (a - ru)\Big).$$

Como T es lineal,

$$T(u) = \frac{1}{2r}\Big(T(a + ru) - T(a - ru)\Big).$$

Luego

$$\|Tu\|_Y \le \frac{1}{2r} \left(\|T(a + ru)\|_Y + \|T(a - ru)\|_Y\right) \le \frac{M}{r}.$$

Pasando al supremo sobre u en $C_X(0_X, 1)$, obtenemos $\|T\| \le \frac{M}{r}$. $\square$

2 Teorema. *Sea X un espacio de Banach y sea Y un espacio normado. Sea F un subconjunto de $\mathcal{B}(X,Y)$ tal que para cada x en X*

$$\sup_{T\in F} \|T(x)\|_Y < +\infty.$$

Entonces

$$\sup_{T\in F} \|T\| < +\infty.$$

Demostración. Para cada n en $\mathbb{N}$, pongamos

$$A_n := \left\{x \in X\colon \quad \sup_{T\in F} \|Tx\|_Y \le n\right\} = \{x \in X\colon \quad \forall T \in F \quad \|Tx\|_Y \le n\}\,.$$

De la suposición se sigue que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$. Como X es un espacio métrico completo, es un espacio de Baire. Elegimos un m en $\mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A_m)) \ne \varnothing$. De la fórmula

$$A_m = \bigcap_{T\in F} \{x \in X\colon \ \|Tx\|_Y \le m\}$$

se sigue que el conjunto A_m es cerrado, así que $\operatorname{int}(A_m) \ne \varnothing$. Por eso existe un a en X y un $r > 0$ tales que $C_X(a, r) \subseteq A_m$.

Sea $T \in F$. Para cada x en $C_X(a, r)$ tenemos $x \in A_m$, así que

$$\|Tx\|_Y \le m.$$

Aplicando el Lema 1 concluimos que $\|T\| \le m/r$. □

3 Corolario (sobre las sucesiones puntualmente convergentes de operadores lineales acotados)**.** *Sean X un espacio de Banach Y un espacio normado, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{B}(X,Y)$. Supongamos que para cada x en X la sucesión $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en Y a un vector que denotemos por $S(x)$. Entonces $S \in \mathcal{B}(X,Y)$.*

Demostración. Aplicando la linealidad de T_n y pasando al límite, es fácil ver que la función S es lineal. Mostremos que el operador lineal S es acotado. Para cada x en X la sucesión $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, luego el conjunto $\{T_n x\colon \ n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en Y. Por el principio de acotación uniforme, existe $C \ge 0$ tal que $\|T_n\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \le C$ para cada n en $\mathbb{N}$. Luego

$$\forall x \in X \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|T_n x\|_Y \le C\|x\|_X.$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$, obtenemos que

$$\forall x \in X \qquad \|Sx\|_Y \le C\|x\|_X. \qquad \square$$

4 Corolario (los conjuntos débilmente acotados en un espacio normado son acotados)**.** *Sea X un espacio normado y sea A un subconjunto de X tal que para cada φ en X^* el conjunto de números $\{\varphi(x)\colon\ x \in A\}$ es acotado. Entonces A es acotado.*

Demostración. Denotemos por $\Lambda(x)$ al funcional de evaluación en x:

$$\Lambda(x)\colon X^* \to \mathbb{C}, \qquad \Lambda(x)(\varphi) := \varphi(x).$$

Ya sabemos que $\Lambda(x) \in X^{**}$ y por un corolario del teorema de Hahn–Banach $\|\Lambda(x)\| = \|x\|$. Notamos que $\{\Lambda(x)\colon\ x \in A\}$ es un subconjunto de $X^{**} = \mathcal{B}(X^*, \mathbb{C})$, y este subconjunto es puntualmente acotado. Como X^* es completo, por el principio de acotación uniforme concluimos que

$$\sup_{x \in A} \|\Lambda(x)\| < +\infty. \qquad \square$$

Demostración del principio de acotación uniforme propuesta por Alan D. Sokal, 2010

Esta demostración es más elemental en el sentido que no utiliza el teorema de Baire.

Demostración del principio de acotación uniforme. Supongamos que

$$\sup_{T \in F} \|T\| = +\infty.$$

Elegimos una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en F tal que $\|T_n\| \ge 4^n$ para cada n en $\mathbb{N}$. Pongamos x_0 y construimos una sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ de manera inductiva. En cada paso aplicando el Lema 1 a la bola $C_X(x_{n-1}, 3^{-n})$ y encontramos un punto x_n en X tal que

$$\|x_n - x_{n-1}\|_X \le 3^{-n}, \qquad \|T_n x_n\|_Y \ge \frac{2}{3}\, 3^{-n}\, \|T_n\|.$$

La sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy. Denotemos por z a su límite. Notamos que si $m > n$, entonces

$$\|x_n - x_m\|_X \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot 3^{-n}.$$

Pasando al límite cuando m tiende a infinito, obtenemos

$$\|x_n - z\|_X \le \frac{1}{2} \cdot 3^{-n}.$$

Luego

$$\|T_n z\|_Y \ge \|T_n x_n\|_Y - \|T_n(x_n - z)\|_Y \ge \|T_n\| \left(\frac{2}{3} \cdot 3^{-n} - \frac{1}{2} \cdot 3^{-n}\right) \ge \frac{1}{6} \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Hemos mostrado que la sucesión $(\|T_n z\|_Y)_{n=1}^{\infty}$ no es acotada, pero esto contradice a la suposición del teorema. $\square$