El principio de acotación uniforme (el teorema de Banach–Steinhaus)

Objetivos. Demostrar el principio de acotación uniforme.

Prerrequisitos. Teorema de Baire, operadores lineales acotados en espacios normados.

1 Teorema. *Sea X un espacio de Banach y sea Y un espacio normado. Sea F un subconjunto de $\mathcal{B}(X,Y)$ tal que para cada x en X*

$$\sup_{T\in F} \|T(x)\|_Y < +\infty.$$

Entonces

$$\sup_{T\in F} \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} < +\infty.$$

Demostración. Para cada n en $\mathbb{N}$, pongamos

$$A_n \coloneqq \left\{ x\in X\colon\quad \sup_{T\in F}\|Tx\|_Y \le n \right\} = \left\{ x\in X\colon\quad \forall T\in F\quad \|Tx\|_Y \le n \right\}.$$

De la suposición se sigue que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$. Como X es un espacio métrico completo, es un espacio de Baire. Elegimos un m en $\mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(\operatorname{clos}(A_m)) \ne \varnothing$. De la fórmula

$$A_n = \bigcap_{T\in F} \{x\in X\colon\ \|Tx\|_Y \le n\}$$

se sigue que el conjunto A_m es cerrado, por eso $\operatorname{int}(A_m)\ne\varnothing$. Por eso existe un a en X y un $r>0$ tales que $C(a,r)\subseteq A_m$, donde

$$C(a,r) \coloneqq \{x\in X\colon\ \|x-a\|_X \le r\}.$$

Sea $T\in F$. Vamos a acotar la norma de T. Sea $u\in C(0_X,1)$, esto es, u en X y $\|u\|_X\le 1$. Entonces

$$T(u) = \frac{1}{r}T(ru) = \frac{1}{r}T(a+ru-a) = \frac{1}{r}\big(T(a+ru)-T(a)\big).$$

Notamos que $a, a+ru \in C(a,r)\subseteq A_m$. Por eso

$$\|T(u)\|_Y \le \frac{1}{r}\big(\|T(a+ru)\|_Y + \|T(a)\|_Y\big) \le \frac{2m}{r}.$$

Esta desigualdad se cumple para cada u en $C(0_X,1)$, luego

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \le \frac{2m}{r}.$$

La última cota superior se cumple para cada T en F. □

2 Corolario (sobre las sucesiones puntualmente convergentes de operadores lineales acotados)**.** *Sean X un espacio de Banach Y un espacio normado, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{B}(X,Y)$. Supongamos que para cada x en X la sucesión $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en Y a un vector que denotemos por $S(x)$. Entonces $S \in \mathcal{B}(X,Y)$.*

Demostración. Aplicando la linealidad de T_n y pasando al límite, es fácil ver que la función S es lineal. Mostremos que el operador lineal S es acotado. Para cada x en X la sucesión $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, luego el conjunto $\{T_n x\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en Y. Por el principio de acotación uniforme, existe $C \geq 0$ tal que $\|T_n\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq C$ para cada n en $\mathbb{N}$. Luego

$$\forall x \in X \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|T_n x\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$, obtenemos que

$$\forall x \in X \qquad \|Sx\|_Y \leq C\|x\|_X. \qquad \square$$

3 Corolario (los conjuntos débilmente acotados en un espacio normado son acotados)**.** *Sea X un espacio normado y sea A un subconjunto de X tal que para cada φ en X^* el conjunto de números $\{\varphi(x)\colon\ x \in A\}$ es acotado. Entonces A es acotado.*

Demostración. Denotemos por $\Lambda(x)$ al funcional de evaluación en x:

$$\Lambda(x)\colon X^* \to \mathbb{C}, \qquad \Lambda(x)(\varphi) \coloneqq \varphi(x).$$

Ya sabemos que $\Lambda(x) \in X^{**}$ y por un corolario del teorema de Hahn–Banach $\|\Lambda(x)\| = \|x\|$. Notamos que $\{\Lambda(x)\colon\ x \in A\}$ es un subconjunto de $X^{**} = \mathcal{B}(X^*, \mathbb{C})$, y este subconjunto es puntualmente acotado. Como X^* es completo, por el principio de acotación uniforme concluimos que

$$\sup_{x\in A} \|\Lambda(x)\| < +\infty. \qquad \square$$

Demostración de Alan D. Sokal, 2010

Esta demostración es más elemental en el sentido que no utiliza el teorema de Baire.

4 Lema. *Sean X, Y espacios normados, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, $a \in X$, $r > 0$. Entonces*

$$\sup_{x \in C(a,r)} \|Tx\| \geq r\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}.$$

Demostración. Denotemos el supremum en lado izquierdo por M. Sea $u \in C(0_X, 1)$. Entonces $a + ru, a - ru \in C(a,r)$, y

$$\|Tu\|_Y = \frac{1}{2r}\|T(2ru)\|_Y \leq \frac{1}{2r}\left(\|T(a+ru)\|_Y + \|T(a-ru)\|_Y\right) \leq \frac{M}{r}.$$

Pasando al supremos sobre todo u en $C(0_X, 1)$, obtenemos $\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq \frac{M}{r}$. $\square$

Demostración del principio de acotación uniforme. Supongamos que

$$\sup_{T \in F} \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} = +\infty.$$

Elegimos una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en F tal que $\|T_n\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \geq 4^n$ para cada n en $\mathbb{N}$. Pongamos x_0 y construimos una sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ de manera inductiva. En cada paso aplicando el Lema 4 a la bola $C(x_{n-1}, 3^{-n})$ y encontramos un punto x_n en X tal que

$$\|x_n - x_{n-1}\|_X \leq 3^{-n}, \qquad \|T_n x_n\|_Y \geq \frac{2}{3}\, 3^{-n}\, \|T_n\|_{\mathcal{B}(X,Y)}.$$

La sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy. Denotemos por z a su límite. Notamos que si $m > n$, entonces

$$\|x_n - x_m\|_X \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot 3^{-n}.$$

Pasando al límite cuando m tiende a infinito, obtenemos

$$\|x_n - z\|_X \leq \frac{1}{2} \cdot 3^{-n}.$$

Luego

$$\|T_n z\|_Y \geq \|T_n x_n\|_Y - \|T_n(x_n - z)\|_Y \geq \|T_n\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \left(\frac{2}{3} \cdot 3^{-n} - \frac{1}{2} \cdot 3^{-n}\right) \geq \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Hemos mostrado que la sucesión $(\|T_n z\|_Y)_{n=1}^{\infty}$ es no acotada, pero esto contradice a la suposición del teorema. $\square$