Aproximación uniforme de funciones continuas por polinomios trigonométricos

Objetivos. Demostrar que cada función $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua y 2π-periódica se puede aproximar uniformemente por polinomios trigonométricos.

Requisitos. El núcleo de Fejér, convolución periódica (cíclica), núcleos aproximativos.

Convolución periódica (repaso breve)

1. Funciones 2π-periódicas integrables sobre intervalos de longitud 2π. Denotamos por $L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ a las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son Lebesgue-medibles, 2π-periódicas y p-integrables sobre el intervalo $[0, 2\pi)$.

2. La convolución periódica (repaso breve). Dadas dos funciones $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ y $g \in L^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$, denotamos por $f * g$ su *convolución periódica*:

$$(f * g)(\theta) \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta - \eta) g(\eta)\, d\mu(\eta). \tag{1}$$

3. Monomios y polinomios trigonométricos. Para cada k en $\mathbb{Z}$, denotamos por φ_k a la función $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida mediante la regla

$$\varphi_k(\theta) \coloneqq \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta}.$$

Las funciones φ_k se llaman *monomios trigonométricos*. Combinaciones lineales finitas de funciones φ_k se llaman *polinomios trigonométricos*.

4. Proposición (convolución de una función con un monomio trigonométrico). Sean $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ y $k \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\varphi_k * f = f_k \varphi_k,$$

donde f_k es el k-ésimo coeficiente de Fourier de f:

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,\theta}\, d\theta.$$

Demostración.

$$(\varphi_k * f)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}(\xi - \theta)}\, f(\theta)\, d\theta = f_k \varphi_k(\xi). \qquad \square$$

5. Proposición (convolución de una función con un polinomio trigonométrico es un polinomio trigonométrico). Sea $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ y sea g un polinomio trigonométrico. Entonces $f * g$ también es un polinomio trigonométrico.

Demostración. Sale de la Proposición 4 y del hecho que la convolución es una operación lineal con respecto a cada uno de sus dos argumentos. $\square$

Núcleos aproximativos

6. Definición (núcleo aproximativo). Una sucesión de funciones $(K_n)_{n=0}^{\infty}$ se llama *núcleo aproximativo* de funciones 2π-periódicas, si las funciones K_n están definidas en $\mathbb{R}$, son 2π-periódicas, y se satisfacen las siguientes propiedades:

(NA1) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \|K_n\|_{1,2\pi} < +\infty$.

(NA2) Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} K_n\, d\mu = 1$.

(NA3) Para cada $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{(\delta,2\pi-\delta)} |K_n|\, d\mu = 0.$$

7. Definición (sucesión de Dirac). Algunos autores (por ejemplo, Serge Lang) utilizan las palabras *sucesión de Dirac* para hablar de núcleos aproximativos positivos. En este caso se supone adicionalmente que $K_n(\theta) \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y cada $\theta \in \mathbb{R}$, y la condición (NA1) se puede omitir porque sale como corolario de (NA2).

8. Núcleo de Fejér (repaso breve). Así llamamos la sucesión de funciones $(\Phi_n)_{n=0}^{\infty}$ definidas mediante las siguientes fórmulas equivalentes:

$$\Phi_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta} = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,\theta} \tag{2}$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos(k\theta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos(k\theta) \tag{3}$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{n\theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \right)^2. \tag{4}$$

9. Teorema: el núcleo de Fejer es un núcleo aproximativo (repaso breve). La sucesión $(\Phi_n)_{n=0}^{\infty}$ definida mediante (2) es una sucesión de Dirac y por lo tanto es un núcleo aproximativo.

Convolución de una función continua con un núcleo aproximativo

10. Notación (funciones continuas 2π-periódicas). Denotamos por $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ a la clase de todas las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son continuas y 2π-periódicas. Notamos que si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, entonces f es continua en el compacto $[0, 2\pi]$, luego es uniformemente continua en este compacto. Por 2π-periodicidad, es fácil ver que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

11. Teorema (convolución de una función continua con un núcleo aproximativo). Sea $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ y sea $(K_n)_{n=0}^{\infty}$ un núcleo aproximativo. Entonces la sucesión $f * K_n$ tiende uniformemente a f.

Demostración. Aplicando la condición (NA1) encontramos una cota superior finita C para las normas de K_n:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \qquad \|K_n\|_{1,2\pi} \leq C. \tag{5}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Usando el hecho que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ encontramos un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ de la desigualdad $|\theta_1 - \theta_2| \leq \delta$ se sigue que $|f(\theta_1) - f(\theta_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$. Aplicando la condición (NA3) encontramos un índice $m \in \mathbb{N}_0$ tal que para cada n en $\mathbb{N}_0$ con $n \geq m$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{(\delta, 2\pi-\delta)} |K_n| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2(1 + \|f\|_\infty)}. \tag{6}$$

Notamos que gracias a la condición (NA2)

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta) K_n(\eta) \, d\eta.$$

Entonces para cada $\theta \in \mathbb{R}$ y cada $n \geq m$ obtenemos

$$\begin{aligned}
|(f * K_n)(\theta) - f(\theta)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta - \eta) K_n(\eta) \, d\eta - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta) K_n(\eta) \, d\eta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(\theta - \eta) - f(\theta)| \, |K_n(\eta)| \, d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[0,\delta) \cup (2\pi-\delta, 2\pi]} |f(\theta - \eta) - f(\theta)| \, |K_n(\eta)| \, d\eta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(\delta, 2\pi-\delta)} |f(\theta - \eta) - f(\theta)| \, |K_n(\eta)| \, d\eta.
\end{aligned}$$

Notamos que para cualquier punto η en $[0, \delta)$

$$|f(\theta - \eta) - f(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{2C},$$

y para cualquier punto η en $(2\pi - \delta, 2\pi]$

$$|f(\theta - \eta) - f(\theta)| = |f(\theta + 2\pi - \eta) - f(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Luego

$$|(f * K_n)(\theta) - f(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{2C}\,\frac{1}{2\pi} \int\limits_{[0,\delta)\cup(2\pi-\delta,2\pi]} |K_n|\,d\mu + \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(\delta,2\pi-\delta)} |K_n|\,d\mu.$$

En el primer sumando aplicamos la cota (5), y en segundo la cota (6):

$$|(f * K_n)(\theta) - f(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

12. Teorema de Weierstrass sobre la aproximación uniforme de funciones continuas por polinomios trigonométricos. Sea $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico g tal que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Demostración. Aplicamos el Teorema 11 con $K_n = \Phi_n$; en otras palabras, elegimos el núcleo de Fejér como el núcleo aproximativo. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $\|\Phi_n * f - f\|_\infty < \varepsilon$. Por otro lado, como Φ_n es un polinomio trigonométrico, por la Proposición 5 la función $g \coloneqq \Phi_n * f$ también es un núcleo trigonométrico. $\square$