Conjuntos totalmente acotados en espacios métricos

Objetivos. Conocer el concepto de subconjunto acotado de un espacio métrico.

Prerrequisitos. Subespacio de un espacio métrico, vecindades uniformes de un conjunto, espacio métrico totalmente acotado.

1 Repaso (subespacio de un espacio métrico)**.** Sea (X,d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Denotemos la restricción $d|_{Y^2}$ por d_Y. Es fácil ver que (Y,d_Y) es un espacio métrico.

2 Definición (subconjunto totalmente acotado de un espacio métrico)**.** Sea (X,d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es *totalmente acotado* en (X,d) si (Y,d_Y) es un espacio métrico totalmente acotado.

3 Observación. Sean (X,d) un espacio métrico, $Y \subseteq X$, $A \subseteq Y$, $\varepsilon > 0$. Denotemos por $V_Y(A,\varepsilon)$ a la ε-vecindad uniforme del conjunto A en el espacio métrico (Y,d_Y):

$$V_Y(A,\varepsilon) := \Big\{ y \in Y : \ D_A(y) < \varepsilon \Big\}.$$

Obviamente,

$$V_Y(A,\varepsilon) = V(A,\varepsilon) \cap Y.$$

4 Proposición (varias formas equivalentes de la definición de subconjunto totalmente acotado de un espacio métrico)**.** *Sea (X,d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *Y es totalmente acotado en X;*
- *para cada $\varepsilon > 0$ existe $A \subseteq Y$ tal que A es finito y $Y = V(A,\varepsilon) \cap Y$;*
- *para cada $\varepsilon > 0$ existe $A \subseteq Y$ tal que A es finito y $Y \subseteq V(A,\varepsilon)$;*
- *para cada $\varepsilon > 0$ existe $A \subseteq Y$ tal que A es finito y*

$$Y \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a,\varepsilon).$$

Demostración. Ejercicio. □

5 Proposición (criterio de subconjunto totalmente acotado en términos de ε-redes externas)**.** *Sea X un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Y es totalmente acotado si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito A del espacio X tal que $d(x, A) < \varepsilon$ para cada x en Y.*

Demostración. La necesidad es obvia. Demostremos la suficiencia. Sea $\varepsilon > 0$. Encontramos en X una $\varepsilon/2$-red finita A para el conjunto Y, es decir, un conjunto finito $A \subseteq X$ tal que para cada y en Y se cumple que $D_A(y) < \varepsilon/2$.

Consideremos el siguiente subconjunto de A:

$$P \coloneqq \left\{ a \in A \colon D_Y(a) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Como A es finito, P también es finito. Sea $m \coloneqq \#P$. Numeremos los elementos de P:

$$P = \{p_1, \ldots, p_m\}.$$

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$, usando la propiedad $D_Y(p_j) < \frac{\varepsilon}{2}$, encontremos un punto $q_j \in Y$ tal que $d(p_j, q_j) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pongamos

$$Q \coloneqq \{q_1, \ldots, q_m\}.$$

Por construcción, Q es un subconjunto finito de Y. Demostremos que Q es una ε-red para Y. Sea $y \in Y$. Como $y \in V(A, \varepsilon/2)$, existe a en A tal que $d(y, a) < \varepsilon/2$. Notemos que $D_Y(a) \le d(y, a) < \varepsilon/2$. Por eso $a \in P$. Encontramos j en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $a = p_j$. Usamos la definición de $D_Q(y)$ y la desigualdad del triángulo:

$$D_Q(y) \le d(y, q_j) \le d(y, p_j) + d(p_j, q_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como y es un elemento general de Y, hemos demostrado que $Y \subseteq V(Q, \varepsilon)$. □

6 Observación. Dentro de la demostración de la Proposición 5 hemos demostrado que P es una $\varepsilon/2$-red para A.

7 Proposición (ser totalmente acotado es una propiedad hereditaria)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico totalmente acotado y sea $Y \subseteq X$. Entonces, Y es totalmente acotado.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición que X es totalmente acotado, encontramos $A \subseteq X$ tal que A es finito y $X = V(A, \varepsilon)$. Luego $Y \subseteq V(A, \varepsilon)$. Por la Proposición 5, hemos demostrado que Y es totalmente acotado. □

8 Corolario. *Sea (X, d) un espacio métrico y sean $Z \subseteq Y \subseteq X$. Supongamos que Y es totalmente acotado. Entonces, Z es totalmente acotado.*

Demostración. Aplicamos la Proposición 7 al espacio métrico (Y, d_Y) y su subconjunto Z. $\square$

9 Proposición. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces, $[a, b]$ es totalmente acotado.*

Demostración. Pongamos $L := b - a$. Sea $\varepsilon > 0$. Encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$m > \frac{L}{\varepsilon}.$$

Por ejemplo, puede servir

$$m := \left\lfloor \frac{L}{\varepsilon} \right\rfloor.$$

Considemos la malla uniforme de m partes para el segmento $[a, b]$:

$$p_j := a + \frac{L}{m} j \qquad (0 \le j \le m),$$

$$A := \Big\{ p_j\colon\ 0 \le j \le m \Big\}.$$

Obviamente, $A \subseteq [a, b]$ y $\#A = m + 1$. Mostremos que A es una ε-red para $[a, b]$. Dado x en $[a, b]$, pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{m(x-a)}{L} \right\rfloor.$$

Notemos que $k \in \{0, \ldots, m\}$ y

$$k \le \frac{m(x-a)}{L} < k + 1.$$

Multiplicamos por L/m y sumamos a:

$$p_k = a + \frac{L}{m} k \le x < a + \frac{L}{m} (k+1) = p_{k+1}.$$

Por lo tanto, $d(x, p_k) = x - p_k < p_{k+1} - p_k = \frac{L}{m} < \varepsilon$. $\square$

10 Proposición. *Sea $Y \subseteq \mathbb{R}$. Entonces, Y es totalmente acotado si, y solo si, Y es acotado.*

Idea de demostración. Si Y es acotado, entonces existe $L > 0$ tal que $Y \subseteq [-L, L]$. $\square$

11 Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$ tal que Y es totalmente acotado. Entonces, $\mathrm{cl}(Y)$ es totalmente acotado.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Sea $A \subseteq Y$ una $\varepsilon/2$-red para Y. En otras palabras, A es finito y $Y \subseteq V(A, \varepsilon/2)$. Mostremos que A es una ε-red para $\mathrm{cl}(Y)$. Sea $x \in \mathrm{cl}(Y)$. Encontramos y en Y tal que $d(x, y) <$
$eps/2$. Encontramos a en A tal que $d(y, a) < \varepsilon/2$. Por la desigualdad del triángulo,

$$d(x, a) \le d(x, y) + d(y, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

12 Ejercicio (las funciones Lipschitz-continuas convierten conjuntos totalmente acotados en conjuntos totalmente acotados)**.** Sean (X, d), (Y, ρ) espacios métricos y sea $f \colon X \to Y$ una función Lipschitz continua. Esto significa que existe $L > 0$ tal que

$$\forall a, b \in X \qquad \rho(f(a), f(b)) \le L\, d(x, y).$$

Supongamos que $Z \subseteq X$ y Z es acotado en X. Demostrar que $f[Z]$ es acotado en Y.

13 Ejercicio. Sea (X, d) un espacio métrico totalmente acotado y sea (Z, ρ) una completación de (X, d). Demuestre que (Z, ρ) es totalmente acotado.