Espacios métricos totalmente acotados, continuación

Objetivos. Seguir estudiando propiedades de espacios métricos totalmente acotados.

Prerrequisitos. Espacio métrico, subespacio de un espacio métrico, sucesión de Cauchy, espacio topológico separable.

Criterio de espacio métrico no totalmente acotado

1 Proposición (criterio de espacio métrico no totalmente acotado)**.** *Sea X un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) X no es totalmente acotado;

(b) existe una sucesión $s \in X^{\mathbb{N}}$ y un número $\eta > 0$ tales que

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \quad \Big(j \neq k \quad \Longrightarrow \quad d(s_j, s_k) \geq \eta\Big).$$

(c) existen un subconjunto infinito M de X y un $\eta > 0$ tales que

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x, y) \geq \eta.$$

Demostración. Supongamos (a) y demostremos (b). Como X no es acotado, existe $\eta > 0$ tal que en X no hay η-red finita. Elegimos $s_1 \in X$. Como $\{s_1\}$ no es η-red para X, existe s_2 en X tal que $d(s_1, s_2) \geq \varepsilon$. En el k-ésimo paso, encontramos s_k en X tal que $d(s_k, s_j) \geq \varepsilon$ para cada $j < k$.

Supongamos (b) y demostremos (c). Pongamos $M := s[\mathbb{N}]$, esto es, $M := \{s_k \colon\ k \in \mathbb{N}\}$. Entonces η y M tienen las propiedades requeridas.

Supongamos (c) y demostremos (a). Sean η y M como en la condición (c). Demostremos que X no es totalmente acotado. Razonando por reducción al absurdo supongamos que X es totalmente acotado. Entonces su subespacio M también es totalmente acotado. Sea A un subconjunto finito de M tal que para cada x en M se cumple $d(x, A) < \eta$. Entonces para cada x en M encontramos a en A tal que $d(x, a) < \eta$. Por la propiedad de M, concluimos que $a = x$, esto es, $x \in A$. Hemos mostrado que $M = A$, pero esto contradice a la suposición que M es infinito. $\square$

2 Ejercicio. Denotamos por $C([0,1])$ el espacio de funciones continuas $[0,1] \to \mathbb{C}$, con la distancia

$$d(f,g) \coloneqq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(y)|.$$

En este espacio consideremos el conjunto

$$Y \coloneqq \big\{ f \in C([0,1])\colon \quad \forall x \in [0,1] \quad |f(x)| \le 1 \big\}.$$

Determinar si Y es totalmente acotado.

Espacios métricos totalmente acotados y espacios métricos separables

3 Observación (la distancia de un punto a un conjunto, repaso)**.** Recordemos que si X es un espacio métrico, $Y \subseteq X$ y $z \in X$, entonces

$$d(z,Y) \coloneqq \operatorname*{ínf}_{y\in Y} d(z,y).$$

La definición se puede escribir también de la siguiente manera, en términos de la imagen del conjunto $\{z\} \times Y$ bajo la función d:

$$d(z,Y) = \operatorname{ínf}(d[\{z\} \times Y]).$$

Las siguientes propiedades son fáciles de demostrar:

- si $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq X$, entonces $d(z,Y_1) \ge d(z,Y_2)$;
- $d(z,Y) = 0$ si, y sólo si, $z \in \operatorname{cl}(Y)$.

4 Proposición. *Sea X un espacio métrico totalmente acotado. Entonces X es separable.*

Demostración. Para cada p en $\mathbb{N}$ encontramos un subconjunto finito A_p de X tal que $V(A_p, 1/p) = X$. Pongamos

$$Y \coloneqq \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p.$$

Entonces Y es finito o numerable por ser una unión numerable de conjuntos finitos. Mostremos que $\operatorname{cl}(Y) = X$. Sea $x \in X$. Entonces para cada q en $\mathbb{N}$

$$d(x,Y) \le d(x,A_q) < \frac{1}{q},$$

luego $d(x,Y) = 0$ y $x \in \operatorname{cl}(Y)$. $\square$

5 Ejercicio. Dar un ejemplo de espacio métrico que sea separable, pero no sea totalmente acotado.

Espacios métricos totalmente acotados y sucesiones de Cauchy

6 Proposición (criterio de espacio métrico totalmente acotado en términos de sucesiones de Cauchy)**.** *Sea X un espacio métrico. Entonces X es totalmente acotado si, y sólo si, cada sucesión en X contiene una subsucesión de Cauchy.*

Demostración. 1. Sea X totalmente acotado y sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Para cada $Y \subseteq X$ pongamos

$$J_Y \coloneqq x^{-1}[Y], \qquad \text{esto es,} \qquad J_Y = \big\{n \in \mathbb{N}\colon\; x_n \in Y\big\}.$$

Vamos a construir por inducción una sucesión decreciente $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

- $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente,
- $\operatorname{diam}(A_k) < 2^{-k-1}$ para cada k en $\mathbb{N}$,
- J_{A_k} es infinito para cada k en $\mathbb{N}$.

En el paso 1 encontramos una cubierta finita $\mathcal{C}_1$ de X tal que $\operatorname{diam}(Y) < 1/2^2$ para cada Y en $\mathcal{C}_1$. Notamos que

$$\bigcup_{Y\in\mathcal{C}_1} J_Y = \bigcup_{Y\in\mathcal{C}_1} x^{-1}[Y] = x^{-1}\left[\bigcup_{Y\in\mathcal{C}_1} Y\right] = x^{-1}[X] = \mathbb{N}.$$

Como $\mathcal{C}_1$ es finito, no es posible que todos los elementos de la familia $(J_Y)_{Y\in\mathcal{C}_1}$ sean finitos. Elejimos A_1 en $\mathcal{C}_1$ tal que J_{A_1} sea infinito.

En el k-ésimo paso, con $k \ge 2$, encontramos una cubierta finita $\mathcal{C}_k$ del conjunto A_{k-1} tal que $\operatorname{diam}(Y) < 2^{-k-1}$ para cada Y en $\mathcal{C}_k$. Notamos que

$$\bigcup_{Y\in\mathcal{C}_k} J_Y = \bigcup_{Y\in\mathcal{C}_k} x^{-1}[Y] = x^{-1}\left[\bigcup_{Y\in\mathcal{C}_k} Y\right] \supseteq x^{-1}[A_{k-1}] = J_{A_{k-1}}.$$

Como $J_{A_{k-1}}$ es infinito y $\mathcal{C}_k$ es finito, no es posible que todos los elementos de la familia $(J_Y)_{Y\in\mathcal{C}_k}$ sean finitos. Elegimos $A_k \in \mathcal{C}_k$ tal que J_{A_k} sea infinito.

Por el principio de inducción, la sucesión $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ está bien definida con estas reglas.

Ahora vamos a construir por inducción una sucesión $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Elejimos $\nu(1)$ en $\mathbb{N}$ tal que $\nu(1) \in J_{A_1}$. Lo último significa que $x_{\nu(1)} \in A_1$. En el k-ésimo paso ($k \geq 2$) elegimos $\nu(k)$ en $\mathbb{N}$ tal que $\nu(k) > \nu(k-1)$ y $\nu(k) \in J_{A_k}$, esto es, $x_{\nu(k)} \in A_k$. Entonces la sucesión ν es estrictamente creciente y la sucesión $x\circ\nu$ es de Cauchy. En efecto, como $x_{\nu(k)}, x_{\nu(k+1)} \in A_k$, obtenemos $d(x_{\nu(k)}, x_{\nu(k+1)}) < 2^{-k-1}$.

2. Supongamos que X no es totalmente acotado. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con valores en X tal que para cada $j \neq k$ se cumple $d(a_j, a_k) \geq \varepsilon$. Entonces en la sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ no existe subsucesión de Cauchy. $\square$