Espacios métricos totalmente acotados

Objetivos. Empezar el estudio de espacios totalmente acotados.

Prerrequisitos. Espacio métrico, subespacio de un espacio métrico.

Repaso de herramientas auxiliares

1 Definición (repaso: la distancia de un punto a un conjunto)**.** Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$. Definimos $D_A \colon X \to [0, +\infty]$,

$$D_A(x) \coloneqq \operatorname*{ínf}_{a \in A} d(x, a).$$

2 Ejercicio. Sea X un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ tal que $A \neq \varnothing$. Demostrar que la función D_A es Lipschitz continua con coeficiente 1, esto es, para cada x, y en X,

$$|D_A(x) - D_A(y)| \le d(x, y).$$

3 Definición (vecindades uniformes de un conjunto)**.** Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$V(A, \varepsilon) \coloneqq \big\{x \in X \colon\ D_A(x) < \varepsilon\big\}.$$

4 Proposición (descripciones equivalentes de las vecindades uniformes de un conjunto)**.** *Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$, $\varepsilon > 0$. Entonces*

$$V(A, \varepsilon) = \big\{x \in X \colon \quad \exists a \in A \quad d(x, a) < \varepsilon\big\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon).$$

Demostración. Sea $x \in X$. Aplicamos una propiedad del ínfimo y la definición de la bola abierta:

$$\begin{aligned} d(x, A) < \varepsilon \quad &\iff \quad \operatorname*{ínf}_{a \in A} d(x, a) < \varepsilon \quad \iff \quad \exists a \in A \quad d(x, a) < \varepsilon \\ &\iff \quad \exists a \in A \quad x \in B(a, \varepsilon) \quad \iff \quad x \in \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon). \end{aligned}$$ □

5 Definición (ε-red)**.** Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$, $\varepsilon > 0$. Se dice que A es una *ε-red* en X si $V(A, \varepsilon) = X$.

6 Observación. Por la Proposición 4, la condición $V(A,\varepsilon) = X$ se puede escribir en las siguientes formas equivalentes:

- para cada x en X existe a en A tal que $d(x,a) < \varepsilon$;
- $\bigcup_{a\in A} B(a,\varepsilon) = X$.

La palabra "red" es sobrecargada en matemáticas, por eso su uso en este contexto no es muy recomendable.

7 Definición (repaso: el diámetro de un conjunto)**.** Sea X un espacio métrico y sea $A \subseteq X$.

$$\operatorname{diam}(A) \coloneqq \sup\{d(x,y)\colon\ x,y \in A\}.$$

8 Ejemplo (repaso: el diámetro de una bola abierta)**.** Sean X un espacio métrico, $a \in X$, $r > 0$. Entonces $\operatorname{diam}(B(a,r)) \le 2r$.

Definición y criterio elemental de espacio métrico totalmente acotado

9 Definición (espacio métrico totalmente acotado)**.** Sea X un espacio métrico. Se dice que X es *totalmente acotado* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito A del espacio X tal que $d(x,A) < \varepsilon$ para cada x en X.

10 Proposición (criterio elemental de espacio totalmente acotado)**.** *Sea X un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito A del espacio X tal que $d(x,A) < \varepsilon$ para cada x en X;

(a') para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito A del espacio X tal que

$$X = \bigcup_{a\in A} B(a,\varepsilon);$$

(b) para cada $\varepsilon > 0$ existe una colección finita $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tal que $\cup\mathcal{C} = X$ y para cada V en $\mathcal{C}$ se cumple la desigualdad $\operatorname{diam}(V) < \varepsilon$.

(c) *para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición finita $\mathcal{Q}$ de X tal que para cada V en $\mathcal{Q}$ se cumple la desigualdad* $\operatorname{diam}(V) < \varepsilon$.

Demostración. Debido a la Proposición 4, las condiciones (a) y (a') son equivalentes.

Supongamos (a') y demostremos (b). Sea A un conjunto finito tal que $X = \bigcup_{a\in A} B(a, \varepsilon/3)$. Pongamos

$$\mathcal{C} \coloneqq \{B(a, \varepsilon/3) \colon\ a \in A\}.$$

Entonces $\mathcal{C}$ es finito y $\cup\mathcal{C} = X$. Además, si $V \in \mathcal{C}$, entonces existe a en A tal que $V = B(a, \varepsilon/3)$, luego $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(B(a, \varepsilon/3)) \le 2\varepsilon/3 < \varepsilon$.

Supongamos (b) y demostremos (c). Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\mathcal{C}$ como en la condición (b). Numeramos los elementos de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = \{V_1, \ldots, V_m\}.$$

Definimos $W_1, \ldots, W_m$ de la siguiente manera:

$$W_j \coloneqq V_j \setminus \left(\bigcup_{1\le k<j} V_k \right).$$

Como ya vimos en cursos de la teoría de medida, los conjuntos $W_1, \ldots, W_m$ construidos de esta manera son disjuntos a pares y $W_1 \cup \ldots \cup W_m = V_1 \cup \ldots \cup V_m = X$. Poniendo $\mathcal{Q} \coloneqq \big\{W_1, \ldots, W_m\big\} \setminus \{\varnothing\}$ obtenemos una partición de X. Además, para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ tenemos $\operatorname{diam}(W_j) \le \operatorname{diam}(V_j) < \varepsilon$.

Supongamos (c) y demostremos (a'). Sea $\varepsilon > 0$. Usando la condición (c) encontramos una partición finita $\mathcal{Q}$ de subconjuntos de X tal que para cada V en $\mathcal{Q}$ se cumple la desigualdad $\operatorname{diam}(V) < \varepsilon$.

Por la definición de partición, los elementos de $\mathcal{Q}$ son conjuntos no vacíos. En cada elemento V de la colección $\mathcal{Q}$ elegimos un punto a y formamos de estos puntos elegidos el conjunto A. Entonces A es finito. Más aún, si $V \in \mathcal{Q}$ y $a \in V$, entonces para cada b en V se cumple $d(a, b) \le \operatorname{diam}(V) < \varepsilon$, así que $b \in B(a, \varepsilon)$. Esto significa que $V \subseteq B(a, \varepsilon)$. De aquí se sigue que

$$X = \cup\mathcal{Q} = \bigcup_{V\in\mathcal{Q}} V \subseteq \bigcup_{a\in A} B(a, \varepsilon) \subseteq X,$$

es decir, $\bigcup_{a\in A} B(a, \varepsilon) = X$. $\square$

Espacios métricos totalmente acotados son acotados y separables

11 Proposición. *Sea X un espacio métrico totalmente acotado. Entonces X es acotado.*

Demostración. Para $\varepsilon = 1$ encontramos un subconjunto finito A de X tal que para cada x en X se cumple $d(x, A) < 1$. Pongamos

$$L \coloneqq \max_{a,b \in A} d(a, b).$$

Entonces $\operatorname{diam}(X) \leq L + 2$. En efecto, dados x, y en X, encontramos a, b en A tales que $d(x, a) < 1$, $d(y, b) < 1$, y obtenemos

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq L + 2. \qquad \square$$

12 Proposición. *Sea X un espacio métrico totalmente acotado. Entonces X es separable.*

Demostración. Para cada p en $\mathbb{N}$ encontramos un subconjunto finito A_p de X tal que para cada x en X se cumple $d(x, A_p) < 1/p$. Pongamos

$$D \coloneqq \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p.$$

Entonces D es finito o numerable por ser una unión numerable de conjuntos finitos. Mostremos que $\operatorname{cl}(D) = X$. Sea $x \in X$. Entonces para cada q en $\mathbb{N}$

$$d(x, D) \leq d(x, A_q) < \frac{1}{q},$$

luego $d(x, D) = 0$ y $x \in \operatorname{cl}(D)$. $\square$