Espacios métricos totalmente acotados

Objetivos. Estudiar varias descripciones equivalentes de espacios totalmente acotados.

Prerrequisitos. Espacio métrico.

1 Definición (la distancia de un punto a un conjunto, repaso)**.** Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$, $x \in X$.

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

2 Definición (ε-red)**.** Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$, $\varepsilon > 0$. Se dice que A es una *ε-red* en X si para cada x en X se cumple la desigualdad $d(x, A) < \varepsilon$.

La palabra "red" es sobrecargada en matemáticas, por eso en lo que sigue nosotros evitamos el término "ε-red"; sin embargo, muchos autores lo utilizan.

3 Definición (espacio métrico totalmente acotado)**.** Sea X un espacio métrico. Se dice que X es *totalmente acotado* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito A del espacio X tal que $d(x, A) < \varepsilon$ para cada x en X.

4 Lema (dos descripciones equivalentes de la ε-vecindad de un conjunto)**.** *Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$, $\varepsilon > 0$. Entonces*

$$\{x \in X\colon\ d(x, A) < \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon).$$

Demostración. Sea $x \in X$. Aplicamos una propiedad del ínfimo y la definición de la bola abierta:

$$\begin{aligned} d(x, A) < \varepsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad \inf_{a \in A} d(x, a) < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \exists a \in A \quad d(x, a) < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists a \in A \quad x \in B(a, \varepsilon) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon). \qquad \square \end{aligned}$$

5 Definición (el diámetro de un conjunto, repaso)**.** Sea X un espacio métrico y sea $A \subseteq X$.

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y)\colon\ x, y \in A\}.$$

6 Ejemplo (el diámetro de una bola abierta, repaso)**.** Sean X un espacio métrico, $a \in X$, $r > 0$. Entonces $\operatorname{diam}(B(a, r)) \leq 2r$.

7 Proposición (criterio elemental de espacio totalmente acotado)**.** *Sea X un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito A del espacio X tal que $d(x, A) < \varepsilon$ para cada x en X;

(b) para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito A del espacio X tal que

$$X = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon);$$

(c) para cada $\varepsilon > 0$ existe una colección finita $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tal que $\cup\mathcal{C} = X$ y para cada V en $\mathcal{C}$ se cumple la desigualdad $\operatorname{diam}(V) < \varepsilon$.

Demostración. Debido al Lema 4, las condiciones (a) y (b) son equivalentes.

Supongamos (b) y demostremos (c). Sea A un conjunto finito tal que $X = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon/3)$. Pongamos

$$\mathcal{C} := \{B(a, \varepsilon/3) \colon \ a \in A\}.$$

Entonces $\mathcal{C}$ es finito y $\cup\mathcal{C} = X$. Además, si $V \in \mathcal{C}$, entonces existe a en A tal que $V = B(a, \varepsilon/3)$, luego $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(B(a, \varepsilon/3)) \le 2\varepsilon/3$.

Supongamos (c) y demostremos (b). Sea $\varepsilon > 0$. Usando la condición (c) encontramos una colección finita $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tal que $\cup\mathcal{C} = X$ y para cada V en $\mathcal{C}$ se cumple la desigualdad $\operatorname{diam}(V) < \varepsilon$. Pongamos

$$\mathcal{C}' := \mathcal{C} \setminus \{0\}.$$

Entonces $\cup\mathcal{C}' = \cup\mathcal{C} = X$. En cada elemento V de la colección $\mathcal{C}'$ elegimos un punto a y formamos de estos puntos elegidos el conjunto A. Entonces A es finito. Más aún, si $V \in \mathcal{C}$ y $a \in V$, entonces para cada b en V se cumple $d(a, b) \le \operatorname{diam}(V) < \varepsilon$, así que $b \in B(a, \varepsilon)$. Esto significa que $V \subseteq B(a, \varepsilon)$. De aquí se sigue que

$$X = \cup\mathcal{C}' = \bigcup_{V \in \mathcal{C}'} V \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) \subseteq X,$$

es decir, $\bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) = X$. □

8 Proposición. *Sea X un espacio métrico totalmente acotado. Entonces X es acotado.*

Demostración. Para $\varepsilon = 1$ encontramos un subconjunto finito A de X tal que para cada x en X se cumple $d(x, A) < 1$. Pongamos

$$L \coloneqq \max_{a,b \in A} d(a, b).$$

Entonces $\operatorname{diam}(X) \le L + 2$. En efecto, dados x, y en X, encontramos a, b en A tales que $d(x, a) < 1$, $d(y, b) < 1$, y obtenemos

$$d(x, y) \le d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \le L + 2. \qquad \square$$

9 Definición (subconjunto totalmente acotado de un espacio métrico)**.** Sea X un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es *totalmente acotado* si Y considerado como subespacio métrico de X es totalmente acotado.

10 Proposición. *Sea $Y \subseteq \mathbb{R}$. Entonces Y es totalmente acotado si, y solo si, Y es acotado.*

Demostración. Supongamos que Y es acotado. Entonces existe $L > 0$ tal que $A \subseteq [-L, L]$. Mostremos que Y es totalmente acotado. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos n de tal manera que $L/n < \varepsilon$. Definimos

$$A \coloneqq \left\{ \frac{kL}{n} \colon \quad -n \le k \le n \right\}.$$

Entonces $\#A = 2n + 1$ y para cada x en Y se tiene que $d(x, A) < L/n < \varepsilon$. $\square$

11 Proposición. *Sea X un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Entonces Y es totalmente acotado si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito A del espacio X tal que $d(x, A) < \varepsilon$ para cada x en Y.*

Demostración. La necesidad es obvia. Demostremos la suficiencia. Sea $\varepsilon > 0$. Encontramos en X una $\varepsilon/2$-red finita A para el conjunto Y, es decir, un conjunto finito $A \subseteq X$ tal que para cada y en Y se cumple $d(y, A) < \varepsilon/2$. Luego para cada a en A, si $d(a, Y) < \varepsilon/2$, encontramos un punto b en Y tal que $d(a, b) < \varepsilon/2$. Denotemos por C al conjunto de estos puntos. Obviamente $\#C \le \#A$. Demostremos que C es una ε-red para Y. Si $x \in Y$, entonces existe a en A tal que $d(a, x) < \varepsilon/2$. Luego $d(a, Y) < \varepsilon/2$, y existe b en C tal que $d(a, b) < \varepsilon/2$. Por la desigualdad del triángulo, $d(x, b) < \varepsilon$. $\square$

12 Proposición. *Sea X un espacio métrico totalmente acotado y sea $Y \subseteq X$. Entonces Y es totalmente acotado.*

13 Ejercicio. Sea X un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$ tal que Y es totalmente acotado. Demuestre que $\operatorname{cl}(Y)$ es totalmente acotado.

14 Proposición. *Sea X un espacio métrico totalmente acotado. Entonces X es separable.*

Demostración. Para cada p en $\mathbb{N}$ encontramos un subconjunto finito A_p de X tal que para cada x en X se cumple $d(x, A_p) < 1/p$. Pongamos

$$D \coloneqq \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p.$$

Entonces D es finito o numerable por ser una unión numerable de conjuntos finitos. Mostremos que $\mathrm{cl}(D) = X$. Sea $x \in X$. Entonces para cada q en $\mathbb{N}$

$$d(x, D) \leq d(x, A_q) < \frac{1}{q},$$

luego $d(x, D) = 0$ y $x \in \mathrm{cl}(D)$. □

15 Proposición (criterio de espacio métrico no totalmente acotado)**.** *Sea X un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) X no es totalmente acotado;

(b) existen $\varepsilon > 0$ y un subconjunto infinito M de X tal que

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x, y) \geq \varepsilon.$$

Demostración. Supongamos (a) y demostremos (b). Como X no es acotado, existe $\varepsilon > 0$ tal que en X no hay ε-red finita. Elegimos $a_1 \in X$. Como $\{a_1\}$ no es ε-red para X, existe a_2 en X tal que $d(a_1, a_2) \geq \varepsilon$. En el k-ésimo paso, encontramos a_k en X tal que $d(a_k, a_j) \geq \varepsilon$ para cada $j < k$. Pongamos $M \coloneqq \{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$. Entonces ε y M tienen propiedades requeridas.

Supongamos (b) y demostremos (a). Sean ε y M como en la condición (b). Demostremos que X no es totalmente acotado. Razonando por reducción al absurdo supongamos que X es totalmente acotado. Entonces M es totalmente acotado. Sea A un subconjunto finito de M tal que para cada x en M se cumple $d(x, A) < \varepsilon$. Entonces $A = M$, pero esto contradice a la suposición que M es infinito. □

16 Proposición (criterio de espacio métrico totalmente acotado en términos de sucesiones de Cauchy)**.** *Sea X un espacio métrico. Entonces X es totalmente acotado si, y solo si, cada sucesión en X contiene una subsucesión de Cauchy.*

Demostración. 1. Sea X totalmente acotado y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Encontramos una cubierta finita $\mathcal{C}_1$ de X tal que $\operatorname{diam}(A) < 1/2$ para cada A en $\mathcal{C}_1$. Entre los elementos de $\mathcal{C}_1$ elegimos A_1 tal que el conjunto $\{n \in \mathbb{N}\colon\ x_n \in A_1\}$ sea infinito. Elegimos $\nu(1)$ tal que $x_{\nu(1)} \in A_1$. Notamos que A_1 es un espacio totalmente acotado. Repetimos este proceso. En el k-ésimo paso encontramos una cubierta finita $\mathcal{C}_k$ del conjunto A_{k-1} tal que $\operatorname{diam}(A) < 1/2^k$ para cada A en $\mathcal{C}_k$. Entre los elementos de $\mathcal{C}_k$ elegimos A_k tal que el conjunto $\{n \in \mathbb{N}\colon\ x_n \in A_k\}$ sea infinito. Elegimos $\nu(k)$ tal que $\nu(k) > \nu(k-1)$ y $x_{\nu(k)} \in A_k$. La sucesión $(x_{\nu(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. En efecto, como $x_{\nu(k)}, x_{\nu(k+1)} \in A_k$, obtenemos $d(x_{\nu(k)}, x_{\nu(k+1)}) < 2^{-k}$.

2. Supongamos que X no es totalmente acotado. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en X tal que para cada $j \neq k$ se cumple $d(a_j, a_k) \geq \varepsilon$. Entonces en la sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ no existe subsucesión de Cauchy. $\square$