Estructura de los subconjuntos abiertos del eje real

Objetivos. Demostrar que cada subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es una unión finita o numerable de intervalos abiertos disjuntos.

Requisitos. Espacios métricos, intervalos del eje real, relaciones de equivalencia, conjuntos numerables, densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

1 Definición (topología del eje real, repaso)**.** El eje real $\mathbb{R}$ se considera con la topología $\tau_{\mathbb{R}}$ generada por la métrica canónica $d(x,y) := |x-y|$. En otras palabras,

$$\tau_{\mathbb{R}} := \Big\{ A \subseteq \mathbb{R}: \quad \forall x \in A \quad \exists r > 0 \quad (x-r, x+r) \subseteq A \Big\}.$$

Vamos a demostrar que cada subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es una unión finita o numerable de intervalos abiertos disjuntos. Dado un conjunto abierto, primero definimos una relación de equivalencia: decimos que dos puntos $x, y \in A$ son equivalentes, si estos puntos se pueden unir con un intervalo contenido en A. Luego mostramos que cada clase de equivalencia (es decir, cada componente arco-conexa) es un intervalo abierto. Al final mostramos que el conjunto de las clases de equivalencia es finito o numerable.

2 Tarea adicional (subconjuntos conexos del eje real)**.** Demostrar que en $\mathbb{R}$ todo conjunto abierto conexo es un intervalo, y por consecuencia es convexo y arco-conexo. En estos apuntes no trabajamos con estos conceptos generales y elegimos un tratamiento más elemental. En vez de hablar de caminos arbitrarios entre dos puntos x, y, consideramos el intervalo cerrado que los une: $[x,y]$, si $x \le y$; en otro caso $[y,x]$. Para abarcar ambos casos, escribimos $[x,y] \cup [y,x]$. Es lo mismo que la envoltura convexa del conjunto $\{x,y\}$.

3 Lema. *Sea $A \in \tau_{\mathbb{R}}$. Definimos una relación binaria $\overset{A}{\sim}$ en A de la siguiente manera:*

$$x \overset{A}{\sim} y \qquad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \qquad [x,y] \cup [y,x] \subseteq A.$$

Entonces $\overset{A}{\sim}$ es una relación de equivalencia en A.

Demostración. 1. Propiedad reflexiva. Para cualquier x en A, tenemos $[x,x] = \{x\} \subseteq A$.

2. Propiedad simétrica se sigue de la propiedad conmutativa de la operación $\cup$.

3. Propiedad transitiva. Sean $x, y, z \in A$ tales que $x \overset{A}{\sim} y$, $y \overset{A}{\sim} z$. Sin perdida de generalidad, consideremos el caso $x < z$. Entonces $[z,x] = \varnothing \subseteq A$. Demostremos la contención $[x,z] \subseteq A$. Dependiendo de la posición del punto y tenemos tres casos:

I. $x \le y \le z$. En este caso, $[x,z] = [x,y] \cup [y,z] \subseteq A$.

II. $y < x$. En este caso, $[x,z] \subseteq [y,z] \subseteq A$.

III. $z < y$. En este caso, $[x,z] \subseteq [x,y] \subseteq A$. □

4 Lema. *Sea* $A \in \tau_{\mathbb{R}}$ *y sea* $x \in A$. *Denotemos por* $[x]_A$ *la clase de equivalencia de* x *respecto a la relación binaria* $\overset{A}{\sim}$*:*

$$[x]_A \coloneqq \bigl\{y \in A\colon\ x \overset{A}{\sim} y\bigr\}.$$

Además, pongamos

$$\alpha_x \coloneqq \inf\,[x]_A, \qquad \beta_x \coloneqq \sup\,[x]_A.$$

Entonces,

$$[x]_A = (\alpha_x, \beta_x).$$

Demostración. 1. Demostremos que $x \in (\alpha_x, \beta_x)$. Como A es abierto, existe un $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subseteq A$. Obviamente, para cada y en $(x - r, x + r)$, tenemos que

$$[x, y] \subseteq (x - r, x + r) \subseteq A, \qquad [y, x] \subseteq (x - r, x + r) \subseteq A,$$

así que $(x - r, x + r) \subseteq [x]_A$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \inf\,[x]_A \le \inf\,(x - r, x + r) = x - r < x, \\ \beta_x &= \sup\,[x]_A \ge \sup\,(x - r, x + r) = x + r > x. \end{aligned}$$

2. Demostremos que $[x]_A \subseteq (\alpha_x, \beta_x)$. Sea $y \in [x]_A$. Entonces $[y]_A = [x]_A$ y por lo tanto $\alpha_y = \alpha_x$, $\beta_y = \beta_x$. Aplicando el resultado del inciso 1 al punto y en vez del punto x, obtenemos que $y \in (\alpha_y, \beta_y)$, pero el último intervalo coincide con (α_x, β_x).

3. Demostremos que $(\alpha_x, \beta_x) \subseteq [x]_A$. Sea $y \in (\alpha_x, \beta_x)$. Si $y = x$, entonces por supuesto $y \in [x]_A$. Consideremos el caso $y < x$ (el caso $y > x$ se considera de manera similar). La desigualdad $\alpha_x < y$ y la definición de inf implican que existe un punto $a \in [x]_A$ tal que $a < y$. Por tanto $[y, x] \cup [x, y] = [y, x] \subseteq [a, x] \subseteq A$, así que $y \in [x]_A$. □

5 Ejercicio. En las condiciones del lema anterior, demostrar que $\alpha_x, \beta_x \notin A$.

6 Teorema. *Cualquier conjunto abierto en* $\mathbb{R}$ *es una unión finita o numerable de intervalos abiertos disjuntos.*

Demostración. Sea $A \in \tau_{\mathbb{R}}$ y sea $P \coloneqq \{(\alpha_x, \beta_x)\colon\ x \in A\}$. Para cualquier V en P, tenemos que $V \subseteq A$, así que $\bigcup_{V \in P} V \subseteq A$. Por otro lado, si $x \in A$, entonces $x \in (\alpha_x, \beta_x) \in P$ y por lo tanto $x \in \bigcup_{V \in P} V$. Acabamos de demostrar que

$$A = \bigcup_{V \in P} V.$$

Los elementos de P son disjuntos a pares, por ser clases de equivalencia de $\overset{A}{\sim}$.

Definimos $f\colon A \cap \mathbb{Q} \to P$ mediante la regla $f(q) \coloneqq (\alpha_q, \beta_q)$. Sabemos que cualquier intervalo abierto en $\mathbb{R}$ intersecta con $\mathbb{Q}$. Por lo tanto, f es una función suprayectiva (ejercicio: entender este paso de manera detallada). Además, sabemos que $\mathbb{Q}$ es numerable. Por lo tanto, P es finito o numerable. □