La topología inducida por un producto interno

Objetivos. Estudiar algunas propiedades de la topología inducida por un producto interno.

Prerrequisitos. La norma inducida por un producto interno, la desigualdad de Schwarz.

En este tema suponemos que H es un espacio vectorial complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ya sabemos que la siguiente función es una norma en H:

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a \rangle}.$$

También sabemos que se cumple la desigualdad de Schwarz:

$$|\langle a, b \rangle| \le \|a\| \, \|b\|. \tag{1}$$

Como en cualquier espacio normado, se define la distancia

$$d(a, b) := \|a - b\|.$$

Como en cualquier espacio métrico, se definen las bolas

$$B(a, r) := \big\{ v \in H \colon \ d(v, a) < r \big\}.$$

Como en cualquier espacio métrico, se define la topología τ_d.

1 Observación. Como en cualquier espacio métrico, la topología inducida por el producto interno tiene las siguientes propiedades:

- la topología τ_d es de Hausdorff;
- para cada $A \subseteq H$,

$$\operatorname{cl}(A) = \bigcap_{\varepsilon > 0} V(A, \varepsilon), \quad \text{donde} \quad V(A, \varepsilon) := \big\{ x \in H \colon \ d(x, A) < \varepsilon \big\}.$$

2 Observación. Como en cualquier espacio normado, las bolas en H tienen las siguientes propiedades.

- La cerradura de $B(a, r)$ es la bola cerrada $C(a, r)$.

- El interior de $C(a,r)$ es $B(a,r)$.
- Si $r_1 + r_2 > \|a_1 - a_2\|$, entonces $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \varnothing$.
- Las bolas $B(a,r)$ y $C(a,r)$ son convexas.

3 Observación. Como en cualquier espacio normado, la topología de H tiene las siguientes propiedades.

- Las operaciones vectoriales en H son continuas.
- La norma en H es continua.
- $V(A, \varepsilon) = A + B(0_H, \varepsilon)$.
- Si A es abierto y $b \in H$, entonces $A + b$ es abierto.
- Si A es cerrado y $b \in H$, entonces $A + b$ es cerrado.
- Si A es abierto y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces λA es abierto.
- Si A es cerrado y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces λA es cerrado.

4 Observación. Como en cualquier espacio normado, las series convergentes en H tienen las siguientes propiedades.

- Si dos series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ también converge, y
$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$
- Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k)$ converge y
$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$
- Si, además, H es completo y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|$ converge, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Ahora pasamos a las propiedades específicas, que no se cumplen en algunos espacios normados o simplemente no tienen sentido en espacios normados sin producto interno.

Continuidad del producto interno

5 Proposición. *El producto interno es una función continua $H \times H \to \mathbb{C}$.*

Demostración. Sean $a, b \in H$ y sea $\varepsilon > 0$. Para cada $x, y \in H$ obtenemos la siguiente cota superior (basada en la desigualdad de Schwarz):

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle - \langle a, b\rangle| &= |\langle x, y\rangle - \langle x, b\rangle + \langle x, b\rangle - \langle a, b\rangle| \\ &\le |\langle x, y - b\rangle| + |\langle x - a, b\rangle| \le \|x\|\,\|y - b\| + \|x - a\|\,\|b\| \\ &\le (\|a\| + \|x - a\|)\,\|y - b\| + \|x - a\|\,\|b\|. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, pongamos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + \|a\| + \|b\| + \varepsilon}.$$

Notemos que $0 < \delta < 1$. Si $\|x - a\| < \delta$ y $\|y - b\| < \delta$, entonces

$$|\langle x, y\rangle - \langle a, b\rangle| \le (\|a\| + \|b\| + \delta)\delta < \varepsilon. \qquad \square$$

6 Corolario (continuidad del producto interno, en términos de sucesiones)**.** *Sean $a, b \in H$ y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en H que convergen a los puntos a y b, respectivamente. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle a, b\rangle.$$

7 Ejercicio (continuidad del producto interno y las series)**.** Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ tal que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, y sea $b \in H$. Demostrar que

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k, b \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k, b\rangle.$$

Demostrar que

$$\left\langle b, \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle b, a_k\rangle.$$

Los funcionales lineales continuos asociados a vectores en un espacio con producto interno

8 Ejercicio. Sea $a \in H$. Definimos $\varphi_a \colon H \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) \coloneqq \langle x, a \rangle.$$

Demostrar que $\varphi_a \in H^*$.

Más adelante, demostraremos que en cada espacio de Hilbert cada funcional lineal continuo es de esta forma (teorema de Riesz–Fréchet).

Los complementos ortogonales son subespacios cerrados

9 Ejercicio. Sea $X \subseteq H$. Demostrar que

$$X^\perp = \bigcap_{a \in X} \ker(\varphi_a).$$

10 Ejercicio. Sea $X \subseteq H$. Demostrar que $X^\perp$ es un subespacio cerrado de H. Un camino posible: usar el resultado del ejercicio anterior.

11 Ejercicio. Sea $X \subseteq H$. Demostrar que

$$\mathrm{cl}(\ell(X))^\perp = X^\perp.$$

Convexidad estricta de las bolas

12 Ejercicio. Sean $a, b \in H$ tales que $\|a\| \le 1$, $\|b\| \le 1$, $a \ne b$, y sea $\lambda \in (0, 1)$. Demostrar que

$$\|(1 - \lambda)a + \lambda b\| < 1.$$