Topología inducida por una distancia (repaso)

Objetivos. Repasar las propiedades principales de bolas abiertas en un espacio métrico y recordar cómo se construye una topología a partir de una métrica.

Requisitos. Operaciones con conjuntos y sus propiedades, espacios métricos.

Espacios métricos (repaso)

1 Definición (distancia o métrica)**.** Sea X un conjunto. Una función $d\colon X^2 \to [0,+\infty)$ se llama *distancia* o *métrica* sobre X si se cumplen las siguientes condiciones (*axiomas de métrica*).

1. *Desigualdad del triángulo*:
$$\forall a,b,c \in X \qquad d(a,b) \le d(a,c) + d(c,b).$$
2. *Propiedad simétrica*:
$$\forall a,b \in X \qquad d(a,b) = d(b,a).$$
3. Para todo $a \in X$, $\quad d(a,a) = 0$.
4. Para todo $a,b \in X$, $\quad$ si $d(a,b) = 0$, entonces $a = b$.

2 Nota. A menudo, en vez de las condiciones 3 y 4, se escribe una sola condición:
$$\forall a,b \in X \qquad d(a,b) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = b.$$

3 Definición (espacio métrico)**.** Un par ordenado (X,d) se llama *espacio métrico* si X es un conjunto y $d\colon X^2 \to [0,+\infty)$ es una métrica sobre X.

4 Proposición (desigualdad inversa del triángulo)**.** *Sea* (X,d) *un espacio métrico y sean* $a,b,c \in X$*. Entonces*
$$\big|d(a,c) - d(b,c)\big| \le d(a,b).$$

5 Ejemplo (la distancia canónica en $\mathbb{R}$)**.** Denotemos por $d\colon \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty)$ a la función
$$d(x,y) \coloneqq |x-y|.$$
Demuestre que d es una distancia en $\mathbb{R}$.

6 Ejemplo (la distancia generada por una norma)**.** Sea V un espacio vectorial y sea $\|\cdot\|$ una norma en V. Demuestre que la función $d(a,b) \coloneqq \|a-b\|$ es una distancia en V.

7 Ejemplo (las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^2$ y las distancias correspondientes)**.** Recuerde la definición de las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{R}^n$. Los casos más importantes son $p=1$, $p=2$ y $p=+\infty$. Escriba en forma explícita fórmulas para las distancias d_p correspondientes.

Bolas en espacios métricos y sus propiedades principales (repaso)

8 Definición (bola en un espacio métrico)**.** Sea (X, d) un espacio métrico, sea $a \in X$ y sea $r > 0$. Entonces el siguiente conjunto se llama la *bola abierta* (o simplemente *bola*) con centro a y radio r:

$$B(a, r) \coloneqq \{x \in X\colon\ d(a, x) < r\}.$$

De manera similar, por medio de la condición $d(a, x) \le r$, se definen *bolas cerradas*, pero nosotros vamos a repasar aquí solamente propiedades de las bolas abiertas.

9 Proposición (sobre una bola contenida en la otra)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico, sean $a, b \in X$ y sean $R, r > 0$ tales que $d(a, b) + r \le R$. Entonces*

$$B(b, r) \subseteq B(a, R).$$

10 Proposición (sobre dos bolas ajenas)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico, sean $a_1, a_2 \in X$ y sean $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 + r_2 \le d(a_1, a_2)$. Entonces*

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \varnothing.$$

11 Proposición (sobre dos bolas concéntricas)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico, sea $a \in X$ y sean $r_1, r_2 > 0$. Entonces*

$$B(a, r_1) \cap B(a, r_2) = B(a, \min\{r_1, r_2\}).$$

La topología inducida por una métrica (repaso)

12 Definición (puntos interiores de un conjunto respecto a una métrica)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X. Un punto $a \in A$ se llama *punto interior* de A con respecto a la distancia d si existe un número $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A$.

13 Definición (el conjunto de los puntos interiores de un conjunto respecto a una métrica)**.** Denotemos por $\operatorname{int}_d(A)$ al conjunto de los puntos interiores de A respecto a la distancia d:

$$\operatorname{int}_d(A) \coloneqq \big\{x \in X\colon \quad \exists r > 0 \quad B(a, r) \subset A\big\}.$$

Explique por qué $\operatorname{int}_d(A) \subseteq A$.

14 Definición (conjunto abierto en un espacio métrico)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Se dice que A es *abierto* con respecto a la distancia d si cada punto del conjunto A es su punto interior respecto a la distancia d.

15 Definición (el conjunto de los conjuntos abiertos en un espacio métrico)**.** Denotemos por τ_d al conjunto de todos los conjuntos abiertos respecto a la distancia d:

$$\tau_d \coloneqq \big\{A \subset X\colon\ \operatorname{int}_d(A) = A\big\}.$$

16 Teorema (sobre la topología inducida por una distancia). *Sea X un conjunto y sea d una distancia en X. Entonces el conjunto τ_d es una topología en X. Esto significa que se cumplen las siguientes condiciones.*

1. *Si $(A_j)_{j\in J}$ es una familia de conjuntos pertenecientes a τ_d, entonces $\displaystyle\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau_d$.*

2. *Si $A_1, A_2 \in \tau_d$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau_d$.*

3. *$X \in \tau_d$.*

Esta topología se llama la topología inducida *(o* generada*) por la distancia d.*

Concordancia de los conceptos: puntos interiores, bolas abiertas

En cualquier espacio topológico existen conceptos de *puntos interiores* y *conjuntos abiertos*. Mostremos el concepto del *punto interior* de un conjunto respecto a una métrica coincide con el concepto del *punto interior* respecto a la topología inducida. Además mostremos que las "bolas abiertas" son conjuntos abiertos en la topología inducida por la métrica.

17 Proposición (sobre los puntos interiores). *Sea (X, d) un espacio métrico, sea $Y \subseteq X$ y sea $x \in Y$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) x es un punto interior de Y respecto a la distancia d, es decir, existe un radio $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq Y$.

(b) x es un punto interior de Y respecto a la topología τ_d, es decir, existe un conjunto $A \in \tau_d$ tal que $x \in A$ y $A \subseteq Y$.

18 Proposición (bolas abiertas son abiertas en la topología inducida). *Sean (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $r > 0$. Entonces la bola $B(a, r)$ es un conjunto abierto respecto a la métrica d, es decir, $B(a, r) \in \tau_d$.*