Bases de topologías

(un tema de análisis y de topología general)

Egor Maximenko,

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

20 de agosto de 2022

Objetivos.

- Conocer el concepto de una base de una topología dada.
- Conocer el concepto de una “topobase”.
- Mostrar que cada topobase define una topología.

Prerrequisitos.

- Operaciones con familias de conjuntos.
- La unión de una colección de conjuntos.
- Topologías y espacios topológicos.

La unión de una colección de conjuntos (repaso)

Definición

Sea X un conjunto y sea $\gamma \subseteq 2^X$. El conjunto $\cup\gamma$ se define como

$$\cup\gamma := \{x \in X\colon \quad \exists B \in \gamma \quad x \in B\}.$$

La unión de una colección de conjuntos (repaso)

Definición

Sea X un conjunto y sea $\gamma \subseteq 2^X$. El conjunto $\cup\gamma$ se define como

$$\cup\gamma := \{x \in X\colon \quad \exists B \in \gamma \quad x \in B\}.$$

Ejercicio. Sea X un conjunto, sea $\gamma \subseteq 2^X$ y sea $C \subseteq X$. Demostrar que

$$\cup\gamma \subseteq C \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall B \in \gamma \qquad B \subseteq C.$$

Definición de topología (repaso)

Definición

Sea X un conjunto y sea $\tau \subseteq 2^X$.

Se dice que τ es una topología en X, si se cumplen las siguientes propiedades.

1. $\forall \xi \subseteq \tau \quad \cup\, \xi \in \tau$.
2. $\forall A, B \in \tau \quad A \cap B \in \tau$.
3. $X \in \tau$.

Una base de una topología dada

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\beta \subseteq 2^X$. Se dice que β es una base de τ si

$$\tau = \{A \subseteq X : \quad \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup\gamma\}.$$

Una base de una topología dada

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\beta \subseteq 2^X$. Se dice que β es una base de τ si

$$\tau = \{A \subseteq X : \quad \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup\gamma\}.$$

Ejercicio. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea β una base de τ.

Demostrar que $\beta \subseteq \tau$.

Una base de una topología dada

Definición

Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\beta \subseteq 2^X$. Se dice que β es una base de τ si

$$\tau = \{A \subseteq X : \quad \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup\gamma\}.$$

Ejercicio. Sea (X,τ) un espacio topológico y sea β una base de τ. Demostrar que $\beta \subseteq \tau$.

Ejercicio. Sean τ_1, τ_2 topologías en X y sea $\beta \subseteq 2^X$ tal que β es una base de τ_1 y β es una base de τ_2. Mostrar que $\tau_1 = \tau_2$.

Descripción local de los conjuntos abiertos a partir de una base

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$. Entonces

$$\begin{aligned}\{A \subseteq X \colon \quad \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup\gamma\} \\ = \{A \subseteq X \colon \quad \forall x \in A \quad \exists B \in \beta \quad (x \in B) \quad \wedge \quad (B \subseteq A)\}.\end{aligned}$$

Descripción local de los conjuntos abiertos a partir de una base

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$. Entonces

$$\begin{aligned}&\{A \subseteq X\colon \quad \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup\gamma\}\\&\qquad = \{A \subseteq X\colon \quad \forall x \in A \quad \exists B \in \beta \quad (x \in B) \quad \wedge \quad (B \subseteq A)\}.\end{aligned}$$

Demostración de $\subseteq$: ejercicio simple.

Descripción local de los conjuntos abiertos a partir de una base

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$. Entonces

$$\begin{aligned}&\{A \subseteq X\colon \quad \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup\gamma\}\\ &\qquad = \{A \subseteq X\colon \quad \forall x \in A \quad \exists B \in \beta \quad (x \in B) \quad \wedge \quad (B \subseteq A)\}.\end{aligned}$$

Demostración de $\subseteq$: ejercicio simple.

Demostremos $\supseteq$. Sea A tal que

$$\forall x \in X \qquad \exists B \in \beta \qquad (x \in B \quad \wedge \quad B \subseteq A). \tag{$*$}$$

Pongamos $\gamma := \{B \in \beta\colon \quad B \subseteq A\}$. Usando $(*)$ es fácil ver que $\cup\gamma = A$.

Propiedades de una base de una topología dada

Proposición

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea β una base de τ.

Entonces β tiene las siguientes propiedades.

1. $\cup\beta = X$.
2. $\forall A_1, A_2 \in \beta \quad \forall x \in A_1 \cap A_2 \quad \exists A_3 \in \beta \quad (x \in A_3 \quad \wedge \quad A_3 \subseteq A_1 \cap A_2)$.

Demostración de la primera propiedad de β

Como $X \in \tau$,

Demostración de la primera propiedad de β

Como $X \in \tau$, existe $\gamma \subseteq \beta$ tal que

Demostración de la primera propiedad de β

Como $X \in \tau$, existe $\gamma \subseteq \beta$ tal que

$$X = \cup\gamma.$$

Demostración de la primera propiedad de β

Como $X \in \tau$, existe $\gamma \subseteq \beta$ tal que

$$X = \cup\gamma.$$

Por la propiedad creciente de la unión de colecciones de conjuntos,

Demostración de la primera propiedad de β

Como $X \in \tau$, existe $\gamma \subseteq \beta$ tal que

$$X = \cup\gamma.$$

Por la propiedad creciente de la unión de colecciones de conjuntos,

$$\cup\gamma \subseteq \cup\beta.$$

Demostración de la primera propiedad de β

Como $X \in \tau$, existe $\gamma \subseteq \beta$ tal que

$$X = \cup\gamma.$$

Por la propiedad creciente de la unión de colecciones de conjuntos,

$$\cup\gamma \subseteq \cup\beta.$$

Hemos obtenido la siguiente cadena:

$$X = \cup\gamma \subseteq \cup\beta \subseteq X.$$

Demostración de la segunda propiedad de β

Sean $\quad A_1, A_2 \in \beta, \quad x \in A_1 \cap A_2.$

Demostración de la segunda propiedad de β

Sean $\quad A_1, A_2 \in \beta, \quad x \in A_1 \cap A_2.$

Como $\quad A_1, A_2 \in \tau \quad$ y $\quad \tau$ es cerrada bajo las intersecciones finitas,

Demostración de la segunda propiedad de β

Sean $\quad A_1, A_2 \in \beta, \quad x \in A_1 \cap A_2.$

Como $\quad A_1, A_2 \in \tau \quad$ y $\quad \tau$ es cerrada bajo las intersecciones finitas,

$$A_1 \cap A_2 \in \tau.$$

Demostración de la segunda propiedad de β

Sean $\quad A_1, A_2 \in \beta, \quad x \in A_1 \cap A_2.$

Como $\quad A_1, A_2 \in \tau \quad$ y $\quad \tau$ es cerrada bajo las intersecciones finitas,

$$A_1 \cap A_2 \in \tau.$$

Como β es una base de τ,

Demostración de la segunda propiedad de β

Sean $\quad A_1, A_2 \in \beta, \quad x \in A_1 \cap A_2.$

Como $\quad A_1, A_2 \in \tau \quad$ y $\quad \tau$ es cerrada bajo las intersecciones finitas,

$$A_1 \cap A_2 \in \tau.$$

Como β es una base de $\tau, \quad$ existe $\gamma \subseteq \beta \quad$ tal que $\quad A_1 \cap A_2 = \cup\gamma.$

Demostración de la segunda propiedad de β

Sean $\quad A_1, A_2 \in \beta, \quad x \in A_1 \cap A_2.$

Como $\quad A_1, A_2 \in \tau \quad$ y $\quad \tau$ es cerrada bajo las intersecciones finitas,

$$A_1 \cap A_2 \in \tau.$$

Como β es una base de τ, $\quad$ existe $\gamma \subseteq \beta \quad$ tal que $\quad A_1 \cap A_2 = \cup\gamma.$

Finalmente, $\quad$ como $x \in A_1 \cap A_2,$

Demostración de la segunda propiedad de β

Sean $\quad A_1, A_2 \in \beta, \quad x \in A_1 \cap A_2$.

Como $\quad A_1, A_2 \in \tau \quad$ y $\quad \tau$ es cerrada bajo las intersecciones finitas,

$$A_1 \cap A_2 \in \tau.$$

Como β es una base de τ, $\quad$ existe $\gamma \subseteq \beta \quad$ tal que $\quad A_1 \cap A_2 = \cup\gamma$.

Finalmente, $\quad$ como $x \in A_1 \cap A_2$, $\quad$ existe A_3 en $\gamma \quad$ tal que $\quad x \in A_3$.

Una base de topología (“topobase”)

Egor Maximenko: me gusta usar alguna palabra diferente, digamos “topobase”,
para distinguir la siguiente definición de la definición de “una base de una topología dada”.

Una base de topología (“topobase”)

Egor Maximenko: me gusta usar alguna palabra diferente, digamos “topobase”, para distinguir la siguiente definición de la definición de “una base de una topología dada”.

Definición

Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$.

Decimos que β es una topobase, si β tiene las siguientes propiedades.

1. $\cup\beta = X$.
2. $\forall A_1, A_2 \in \beta \quad \forall x \in A_1 \cap A_2 \quad \exists A_3 \in \beta \quad \left(x \in A_3 \quad \wedge \quad A_3 \subseteq A_1 \cap A_2\right)$.

Una base de topología (“topobase”)

Egor Maximenko: me gusta usar alguna palabra diferente, digamos “topobase”, para distinguir la siguiente definición de la definición de “una base de una topología dada”.

Definición

Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$.

Decimos que β es una topobase, si β tiene las siguientes propiedades.

1. $\cup\beta = X$.
2. $\forall A_1, A_2 \in \beta \quad \forall x \in A_1 \cap A_2 \quad \exists A_3 \in \beta \quad \left(x \in A_3 \quad \wedge \quad A_3 \subseteq A_1 \cap A_2\right)$.

Observación. En esta definición no está dada ninguna topología.

La topología generada por una topobase

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$. Supongamos que β es una topobase.

Definimos τ de la siguiente manera:

$$\tau := \{A \subseteq 2^X : \quad \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup \gamma\}.$$

Entonces τ es una topología y β es una base de τ.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup\xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup\xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma :=$$

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup\xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta \colon \ B \subseteq A\}.$$

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta \colon\ B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup\xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta \colon \; B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup\gamma$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : \ B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup \gamma$. Obviamente, $\cup \gamma \subseteq A$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup\xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta \colon\ B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup\gamma$. Obviamente, $\cup\gamma \subseteq A$.

Por otro lado, sea $x \in A$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup\xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : \; B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup\gamma$. Obviamente, $\cup\gamma \subseteq A$.

Por otro lado, sea $x \in A$. Encontramos C en ξ tal que $x \in C$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup\xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : \ B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup\gamma$. Obviamente, $\cup\gamma \subseteq A$.

Por otro lado, sea $x \in A$. Encontramos C en ξ tal que $x \in C$.

Como $C \in \tau$, encontramos $\eta \subseteq \beta$ tal que $C = \cup\eta$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup\xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta :\ \ B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup\gamma$. Obviamente, $\cup\gamma \subseteq A$.

Por otro lado, sea $x \in A$. Encontramos C en ξ tal que $x \in C$.

Como $C \in \tau$, encontramos $\eta \subseteq \beta$ tal que $C = \cup\eta$.

Como $x \in C$, encontramos B en η tal que $x \in B$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup\xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : \; B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup\gamma$. Obviamente, $\cup\gamma \subseteq A$.

Por otro lado, sea $x \in A$. Encontramos C en ξ tal que $x \in C$.

Como $C \in \tau$, encontramos $\eta \subseteq \beta$ tal que $C = \cup\eta$.

Como $x \in C$, encontramos B en η tal que $x \in B$.

Notamos que $B \in \beta$ y $B \subseteq C \subseteq A$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup\xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : \ B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup\gamma$. Obviamente, $\cup\gamma \subseteq A$.

Por otro lado, sea $x \in A$. Encontramos C en ξ tal que $x \in C$.

Como $C \in \tau$, encontramos $\eta \subseteq \beta$ tal que $C = \cup\eta$.

Como $x \in C$, encontramos B en η tal que $x \in B$.

Notamos que $B \in \beta$ y $B \subseteq C \subseteq A$. Luego $B \in \gamma$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea
$$A := \cup\xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos
$$\gamma := \{B \in \beta : \ B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup\gamma$. Obviamente, $\cup\gamma \subseteq A$.

Por otro lado, sea $x \in A$. Encontramos C en ξ tal que $x \in C$.

Como $C \in \tau$, encontramos $\eta \subseteq \beta$ tal que $C = \cup\eta$.

Como $x \in C$, encontramos B en η tal que $x \in B$.

Notamos que $B \in \beta$ y $B \subseteq C \subseteq A$. Luego $B \in \gamma$. Hemos mostrado que $x \in \cup\gamma$.

Segunda demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup\xi.$$

Segunda demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que

Segunda demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup\xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$.

Segunda demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup\xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$.

Usemos la descripción local de los elementos de τ.

Segunda demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup\xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$.

Usemos la descripción local de los elementos de τ.

Sea $x \in A$. Entonces existe P en ξ tal que $x \in P$.

Segunda demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup\xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$.

Usemos la descripción local de los elementos de τ.

Sea $x \in A$. Entonces existe P en ξ tal que $x \in P$.

Como $x \in P$ y $P \in \tau$, existe B en β tal que

$$x \in B, \qquad B \subseteq P.$$

Luego $B \subseteq P \subseteq A$.

Ejercicio. Completar la demostración que τ es una topología.

Demostrar que τ es cerrada bajo la intersección (de dos conjuntos) y que $X \in \tau$.

Las bolas abiertas en un espacio métrico forman una topobase

Ejercicio. Sea (X, d) un espacio métrico. Pongamos

$$\beta := \Big\{ B(a,r)\colon\ \ a \in X,\ \ r > 0 \Big\}.$$

Demostrar que β es una topobase.