Base de topología

Objetivos. Definir el concepto de base de topología. Construir una topología a partir de una base de topología.

1 Definición (la unión de una colección de conjuntos)**.** Sea X un conjunto y sea $\gamma \subseteq 2^X$. El conjunto $\cup\gamma$ se define como

$$\cup\gamma := \big\{x \in X\colon \quad \exists B \in \gamma \quad x \in B\big\}.$$

2 Observación. En las condiciones de la definición anterior, el conjunto $\cup\gamma$ se puede escribir como la unión de la familia idéntica cuyo conjunto de índices es γ:

$$\cup\gamma = \bigcup_{B\in\gamma} B.$$

3 Ejercicio. Sea X un conjunto, sea $\gamma \subseteq 2^X$ y sea $C \subseteq X$. Demostrar que

$$\cup\gamma \subseteq C \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall B \in \gamma \qquad B \subseteq C.$$

4 Ejercicio. Sea X un conjunto y sean $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq 2^X$ tales que $\gamma_1 \subseteq \gamma_2$. Demostrar que

$$\cup\gamma_1 \subseteq \cup\gamma_2.$$

5 Ejercicio. Demostrar o refutar la siguiente conjetura. Sea X un conjunto y sean $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq 2^X$. Entonces

$$\cup(\gamma_1 \cap \gamma_2) = (\cup\gamma_1) \cap (\cup\gamma_2).$$

6 Definición (una base de una topología dada)**.** Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\beta \subseteq 2^X$. Se dice que β es una *base* de τ si

$$\tau = \big\{A \subseteq 2^X\colon \quad \exists\gamma \subseteq \beta \quad A = \cup\gamma\big\}. \tag{1}$$

7 Ejercicio. Sea (X,τ) un espacio topológico y sea β una base de τ. Demostrar que $\beta \subseteq \tau$.

8 Ejercicio. Sean τ_1, τ_2 topologías en X y sea $\beta \subseteq 2^X$ tal que β es una base de τ_1 y β es una base de τ_2. Mostrar que $\tau_1 = \tau_2$.

La siguiente proposición proporciona otra descripción equivalente para la colección de conjuntos que aparece en el lado derecho de (1).

9 Proposición (descripción local de las uniones de una colección de conjuntos)**.** *Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$. Entonces*

$$\begin{aligned}&\{A \subseteq X\colon \quad \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup\gamma\}\\ &\qquad = \{A \subseteq X\colon \quad \forall x \in A \quad \exists B \in \beta \quad (x \in B \quad \wedge \quad B \subseteq A)\}.\end{aligned}$$

Demostración. Demostrar $\subseteq$ es un ejercicio simple.

Demostremos $\supseteq$. Sea A tal que

$$\forall x \in X \qquad \exists B \in \beta \qquad \big(x \in B \quad \wedge \quad B \subseteq A\big). \tag{2}$$

Pongamos

$$\gamma := \big\{B \in \beta\colon \quad B \subseteq A\big\}.$$

Mostremos que $A = \cup\gamma$. Para cada B en γ tenemos $B \subseteq A$, por eso $\cup\gamma \subseteq A$. Por otro lado, dado x en A, aplicamos la condición (2) y encontramos B en β tal que $x \in B$ y $B \subseteq A$. Entonces $B \in \gamma$ y $x \in B \subseteq \cup\gamma$. □

10 Proposición (propiedades de una base de una topología dada)**.** *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea β una base de τ. Entonces β tiene las siguientes propiedades.*

1. $\cup\beta = X$.

2. *Para cada A_1, A_2 en β y cada x en $A_1 \cap A_2$ existe un A_3 en β tal que $x \in A_3$ y $A_3 \subseteq A_1 \cap A_2$.*

Demostración. 1. Como $X \in \tau$, existe $\gamma \subseteq \beta$ tal que $X = \cup\gamma$. Luego

$$X = \cup\gamma \subseteq \cup\beta \subseteq X.$$

2. Sean $A_1, A_2 \in \beta$, $x \in A_1 \cap A_2$. Como $A_1, A_2 \in \tau$ y τ es cerrada bajo las uniones finitas, tenemos que $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Como β es una base de τ, existe $\gamma \subseteq \beta$ tal que $A_1 \cap A_2 = \cup\gamma$. Finalmente, como $x \in A_1 \cap A_2$, existe A_3 en γ tal que $x \in A_3$. □

Egor Maximenko: me gusta introducir alguna palabra diferente, digamos “topobase”, para distinguir la Definición 11 de la Definición 6.

11 Definición (topobase)**.** Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$. Decimos que β es una *base de topología* o, brevemente, una *topobase* si β tiene las siguientes propiedades.

1. $\cup\beta = X$.

2. Para cada A_1, A_2 en β y cada x en $A_1 \cap A_2$ existe un A_3 en β tal que $x \in A_3$ y $A_3 \subseteq A_1 \cap A_2$.

12 Observación. En la definición de topobase no está dada ninguna topología τ.

13 Proposición. *Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$. Supongamos que β es una topobase. Definimos τ de la siguiente manera:*

$$\tau := \left\{ A \subseteq 2^X : \quad \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup\gamma \right\}.$$

Entonces τ es una topología y β es una base de τ.

Inicio de demostración. Sea $\xi \subseteq \tau$. Denotemos $\cup\xi$ por A. Tenemos que demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \left\{ B \in \beta : \ B \subseteq A \right\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup\gamma$. Obviamente, $\cup\gamma \subseteq A$. Por otro lado, si $x \in A$, entonces encontramos C en ξ tal que $x \in C$. Como $C \in \tau$, encontramos $\eta \subseteq \beta$ tal que $C = \cup\eta$. Como $x \in C$, encontramos B en η tal que $x \in B$. Notamos que $B \in \beta$ y $B \subseteq C \subseteq A$. Luego $B \in \gamma$. Hemos mostrado que $x \in \cup\gamma$. $\square$

14 Ejercicio. Completar la demostración.