Nociones básicas de la topología general (repaso)

Objetivos. Repasar las definiciones básicas de la topología general: las vecindades de un punto, el interior y la cerradura (clausura) de un conjunto, funciones continuas.

Requisitos. Operaciones con conjuntos y sus propiedades, espacios métricos.

1. Definición (espacio topológico). Escribir la definición del espacio topológico. Sea X un conjunto y sea τ una colección de subconjuntos de X. Se dice que τ es una *topología* en X si ....

2. Definición (conjunto cerrado). Sea (X, τ) y sea $F \subset X$. El conjunto F se llama cerrado (respecto a la topología τ) si $X \setminus F \in \tau$.

3. Definición (vecindad de un punto, según Hausdorff). Sea (X, τ) un espacio topológico, sea $A \subset X$ y sea $x \in X$. Se dice que A es una *vecindad* o *vecindad abierta* del punto x si $x \in A$ y $A \in \tau$.

4. Definición (vecindad de un punto, según Bourbaki). Sea (X, τ) un espacio topológico, sea $B \subset X$ y sea $x \in X$. Se dice que B es una *vecindad* del punto x si existe un $A \in \tau$ tal que $x \in A$ y $A \subset B$.

5. Observación. La definición de Bourbaki es más general que la de Hausdorff. Nosotros vamos a seguir la definicón de Hausdorff.

Ejemplos de espacios topológicos

6. Sea $X = \{1, 2\}$ y sea $\tau = \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Entonces (X, τ) es un espacio topológico.

7. Topología de un espacio métrico. Recuerde cómo se define la topología inducida por una métrica.

8. Dos definiciones equivalentes de la topología canónica del eje real. Demuestre que las siguientes topologías de $\mathbb{R}$ coinciden:

- τ_1 es la topología inducida por la métrica $d(x, y) := |x - y|$.
- τ_2 consiste en todos los intervalos abiertos de la forma (a, b), donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sus uniones (finitas e infinitas).

Puntos interiores y el interior de un conjunto

9. Definición (punto interior de un conjunto). Sea (X, τ) un espacio topológico, sea $Y \subset X$ y sea $x \in X$. Se dice que x es un punto interior de Y si existe un $A \in \tau$ tal que $x \in A$ y $A \subset Y$.

10. Criterio del conjunto abierto. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subset X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $Y \in \tau$;

(b) todo punto x de Y es un punto interior de Y.

11. Definición (el interior de un conjunto). Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subset X$. El conjunto de todos los puntos interiores de Y se denota por $\operatorname{int}_\tau(Y)$ o simplemente por $\operatorname{int}(Y)$ y se llama el *interior* de Y (respecto a la topología τ).

12. Propiedad principal del interior de un conjunto. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subset X$. Entonces $\operatorname{int}(Y)$ es el abierto más grande contenido en Y, esto es:

1. $\operatorname{int}(Y) \in \tau$, $\operatorname{int}(Y) \subset Y$.
2. Si $A \in \tau$ y $A \subset Y$, entonces $A \subset \operatorname{int}(Y)$.

13. Interior de un conjunto como la unión de todos los abiertos contenidos en este conjunto. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subset X$. Entonces

$$\operatorname{int}(Y) = \bigcup (\tau \cap 2^Y) = \bigcup_{A \in \tau \colon A \subset Y} A.$$

Algunos autores usan la última igualdad como la definición de $\operatorname{int}(Y)$.

Puntos de adherencia y la clausura de un conjunto

14. Definición (puntos de adherencia). Sea (X, τ) un espacio topológico, sea $Y \subset X$ y sea $x \in X$. Se dice que x es un *punto de adherencia* de Y (respecto a la topología τ) si para toda vecindad V del punto x la intersección $V \cap Y$ no es vacía.

15. Criterio del conjunto cerrado. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subset X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Y es cerrado;

(b) todo punto de adherencia de Y pertenece a Y.

16. Definición (clausura de un conjunto). Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subset X$. La *clausura* (o *cerradura*) de Y respecto a la topología τ se define como el conjunto de todos los puntos de adherencia del conjunto Y respecto a la topología τ. Notación: $\mathrm{cl}_\tau(Y)$ o simplemente $\mathrm{cl}(Y)$.

17. Propiedad principal de la clausura. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subset X$. Entonces $\mathrm{cl}(Y)$ es el cerrado más pequeño que contiene a Y, esto es:

1. $\mathrm{cl}(Y)$ es cerrado, $Y \subset \mathrm{cl}(Y)$.
2. Si F es cerrado y $Y \subset F$, entonces $\mathrm{cl}(Y) \subset F$.

18. Clausura de un conjunto como la intersección de todos los cerrados que lo contienen. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subset X$. Entonces

$$\mathrm{cl}(Y) = \bigcap_{F:\, X \setminus F \in \tau \ \wedge \ Y \subset F} F.$$

Algunos autores usan la última igualdad como la definición de $\mathrm{cl}(Y)$.

Funciones continuas

19. Definición (función continua). Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) espacios topológicos y sea $f\colon X \to Y$. Se dice que f es *continua* (respecto a las topologías τ_1 y τ_2) si para todo $A \in \tau_2$ se tiene que $f^{-1}[A] \in \tau_1$.

20. Definición (función continua en un punto). Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) espacios topológicos, sea $f\colon X \to Y$ y sea $x \in X$. Se dice que f es *continua en el punto* x (respecto a las topologías τ_1 y τ_2) si para toda τ_2-vecindad B del punto $f(x)$ existe una τ_1-vecindad A del punto x tal que $f[A] \subset B$.

21. Criterio de la continuidad global en términos de la continuidad local. Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) espacios topológicos y sea $f\colon X \to Y$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es continua;

(b) para todo $x \in X$, la función f es continua en el punto x.

22. Criterio de la continuidad en términos de los conjuntos cerrados. Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) espacios topológicos y sea $f\colon X \to Y$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es continua;

(b) para todo C cerrado en Y, su preimagen $f^{-1}[C]$ es un conjunto cerrado en X.

Ejemplos de conjuntos abiertos o cerrados definidos a través de funciones continuas

23. Sea X un espacio topológico, sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces los siguientes conjuntos son abiertos:

$$\big\{x \in X\colon f(x) < a\big\}, \qquad \big\{x \in X\colon f(x) > a\big\}.$$

24. Sea X un espacio topológico, sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces los siguientes conjuntos son cerrados:

$$\big\{x \in X\colon f(x) \le a\big\}, \qquad \big\{x \in X\colon f(x) \ge a\big\}, \qquad \big\{x \in X\colon f(x) = a\big\}.$$