Descripción de varios conceptos topológicos en espacios métricos, en términos de sucesiones convergentes

Objetivos. Mostrar que en espacios métricos varios conceptos topológicos se pueden describir en términos de sucesiones convergentes.

Prerrequisitos. Conceptos topológicos principales en espacios métricos, el límite de una sucesión.

Suponemos que X es un espacio métrico.

1 Proposición (descripción de los puntos interiores de un conjunto en términos de sucesiones convergentes)**.** *Sean $A \subseteq X$, $b \in X$. Entonces*

$$b \in \operatorname{int}(A) \quad \iff \quad \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \quad \Big(\lim_{n\to\infty} a_n = b \implies \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \ge m\ a_n \in A\Big).$$

Demostración. $\Rightarrow$. Supongamos que $b \in \operatorname{int}(A)$. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Como $b \in \operatorname{int}(A)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(b,\varepsilon) \subseteq A$. Como $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, existe m en $\mathbb{N}$ tal que para cada $n \ge m$ se cumple $d(a_n, b) < \varepsilon$. Luego para cada $n \ge m$ tenemos $a_n \in B(b,\varepsilon) \subseteq A$.

$\Leftarrow$. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que $b \notin \operatorname{int}(A)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ tenemos $B(b,\varepsilon) \nsubseteq A$, esto es,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x(\varepsilon) \in B(b,\varepsilon) \setminus A.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$ apliquemos esta condición con $\varepsilon = 1/n$ y pongamos $a_n \coloneqq x(1/n)$. Luego $d(a_n, b) < 1/n$, así que $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Si existe m en $\mathbb{N}$ tal que para cada $n \ge m$ se cumple $a_n \in A$, entonces, en particular, $a_m \in A$, pero en realidad $a_m \notin A$. □

Recordemos que A es abierto si, y solo si, cada punto a del conjunto A es un punto interior de A. Usando la Proposición 1 obtenemos la siguiente descripción de los conjuntos abiertos.

2 Corolario (criterio de conjuntos abiertos en términos de sucesiones convergentes)**.** *Sea $A \subseteq X$. Entonces A es abierto si, y solo si, para cada b en A y cada sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $X^{\mathbb{N}}$ que converge al punto b, existe m en $\mathbb{N}$ tal que para cada $n \ge m$ se cumple $a_n \in A$.*

3 Proposición (descripción de los puntos de adherencia de un conjunto en términos de sucesiones convergentes)**.** *Sean $A \subseteq X$, $b \in X$. Entonces*

$$b \in \mathrm{cl}(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

Demostración. $\Rightarrow$. Sea $b \in \mathrm{cl}(A)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ la intersección $B(b,\varepsilon) \cap A$ no es vacía, esto es,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists x(\varepsilon) \in B(b,\varepsilon) \cap A.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$ apliquemos esta condición con $\varepsilon = 1/n$ y encontramos a_n en $B(b,\varepsilon) \cap A$. Entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$. Además, como $d(a_n, b) < 1/n$, obtenemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = b$.

$\Leftarrow$. Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Mostremos que $b \in \mathrm{cl}(A)$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, como $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, existe m en $\mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq m$ se tiene $a_n \in B(b,\varepsilon)$. En particular, $a_m \in B(b,\varepsilon)$. Además, $a_m \in A$. Luego $B(b,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. Por la definición de los puntos de adherencia, esto significa que $b \in \mathrm{cl}(A)$. □

4 Corolario (criterio de conjuntos cerrados en términos de sucesiones convergentes)**.** *Sea $A \subseteq X$. Entonces A es cerrado si, y solo si, para cada b en X y cada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $A^{\mathbb{N}}$, si $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, entonces $b \in A$.*

El siguiente resultado se conoce como el *criterio de continuidad de Heine.*

5 Proposición (criterio de continuidad de una funcion en un punto, en términos de sucesiones convergentes)**.** *Sean X, Y espacios métricos, $f\colon X \to Y$, $b \in X$. Entonces f es continua en b si, y solo si, para cada sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ que converge al punto b, la sucesión $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $f(b)$.*

Demostración. $\Rightarrow$. Supongamos que f es continua en el punto b. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Mostremos que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(b)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición que f es continua en b, encontramos $\delta > 0$ tal que para cada x en X con $d(x,b) < \delta$ se cumple que $d(f(x), f(b)) < \varepsilon$. Ahora, usando la hipótesis que $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq m$ se cumple $d(a_n, b) < \delta$. Luego para cada n con $n \geq m$ obtenemos $d(f(a_n), f(b)) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$. Supongamos que para cada sucesión que converge al punto b, la sucesión de sus imágenes converge al punto $f(b)$. Razonando por reducción al absurdo supongamos que f no es continua en b. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe x en $B(b,\delta)$ con $f(x) \notin B(f(b), \varepsilon_0)$. Para cada n en $\mathbb{N}$ aplicamos esta condición con $\delta = 1/n$ y obtenemos una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d(a_n, b) < \frac{1}{n}, \tag{1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d(f(a_n), f(b)) \geq \varepsilon_0. \tag{2}$$

La desigualdad (1) implica que $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Luego, por la suposición, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(b)$. En particular, para ε_0 existe m en $\mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq m$ se cumple la desigualdad $d(f(a_n), f(b)) < \varepsilon_0$. En particular, $d(f(a_m), f(b)) < \varepsilon_0$. Esto contradice a (2). $\square$