El espacio vectorial de todas las funciones complejas definidas en un conjunto

(un tema de álgebra lineal)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

20 de septiembre de 2022

Objetivos.

Dado un conjunto X, definir el espacio vectorial $\mathbb{C}^X$ de las funciones complejas.

Objetivos.

Dado un conjunto X, definir el espacio vectorial $\mathbb{C}^X$ de las funciones complejas.

Prerrequisitos:

- propiedades algebraicas de números complejos;
- operaciones con funciones punto a punto;
- definición del espacio vectorial.

El conjunto $\mathbb{C}^X$

En este tema suponemos que X es un conjunto.

El conjunto $\mathbb{C}^X$

En este tema suponemos que X es un conjunto.

Se puede suponer que X es no vacío.

El conjunto $\mathbb{C}^X$

En este tema suponemos que X es un conjunto.

Se puede suponer que X es no vacío.

De acuerdo con la notación usual de la teoría de conjuntos, denotamos por $\mathbb{C}^X$ al conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{C}$.

Operaciones lineales en $\mathbb{C}^X$

Las operaciones lineales en $\mathbb{C}^X$ se definen punto a punto.

Operaciones lineales en $\mathbb{C}^X$

Las operaciones lineales en $\mathbb{C}^X$ se definen punto a punto.

Definición

Dadas $f, g\colon X \to \mathbb{C}$, sea define $f + g\colon X \to \mathbb{C}$,

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x) \qquad (x \in X).$$

Operaciones lineales en $\mathbb{C}^X$

Las operaciones lineales en $\mathbb{C}^X$ se definen punto a punto.

Definición

Dadas $f, g \colon X \to \mathbb{C}$, sea define $f + g \colon X \to \mathbb{C}$,

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad (x \in X).$$

Definición

Dadas λ en $\mathbb{C}$ y $f \colon X \to \mathbb{C}$, se define $\lambda f \colon X \to \mathbb{C}$,

$$(\lambda f)(x) := \lambda\, f(x) \qquad (x \in X).$$

El espacio vectorial $\mathbb{C}^X$

Proposición

$\mathbb{C}^X$ es un espacio vectorial.

El espacio vectorial $\mathbb{C}^X$

Proposición

$\mathbb{C}^X$ es un espacio vectorial.

De los 8 axiomas del espacio vectorial verifiquemos solamente dos.

Demostración: el elemento neutro bajo la adición

Sea $0_X \colon X \to \mathbb{C}$ la función constante cero:

$$0_X(x) \coloneqq 0 \qquad (x \in X).$$

Demostración: el elemento neutro bajo la adición

Sea $0_X \colon X \to \mathbb{C}$ la función constante cero:

$$0_X(x) := 0 \qquad (x \in X).$$

Mostremos que 0_X es un elemento neutro bajo la adición en $\mathbb{C}^X$.

Demostración: el elemento neutro bajo la adición

Sea $0_X : X \to \mathbb{C}$ la función constante cero:

$$0_X(x) \coloneqq 0 \qquad (x \in X).$$

Mostremos que 0_X es un elemento neutro bajo la adición en $\mathbb{C}^X$.

En efecto, dada f en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, para cada x en X tenemos

$$(f + 0_X)(x)$$

Demostración: el elemento neutro bajo la adición

Sea $0_X \colon X \to \mathbb{C}$ la función constante cero:

$$0_X(x) := 0 \qquad (x \in X).$$

Mostremos que 0_X es un elemento neutro bajo la adición en $\mathbb{C}^X$.

En efecto, dada f en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, para cada x en X tenemos

$$(f + 0_X)(x) =$$

Demostración: el elemento neutro bajo la adición

Sea $0_X\colon X \to \mathbb{C}$ la función constante cero:

$$0_X(x) := 0 \qquad (x \in X).$$

Mostremos que 0_X es un elemento neutro bajo la adición en $\mathbb{C}^X$.

En efecto, dada f en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, para cada x en X tenemos

$$(f + 0_X)(x) = f(x) + 0_X(x)$$

Demostración: el elemento neutro bajo la adición

Sea $0_X \colon X \to \mathbb{C}$ la función constante cero:

$$0_X(x) := 0 \qquad (x \in X).$$

Mostremos que 0_X es un elemento neutro bajo la adición en $\mathbb{C}^X$.

En efecto, dada f en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, para cada x en X tenemos

$$(f + 0_X)(x) = f(x) + 0_X(x) =$$

Demostración: el elemento neutro bajo la adición

Sea $0_X \colon X \to \mathbb{C}$ la función constante cero:

$$0_X(x) := 0 \qquad (x \in X).$$

Mostremos que 0_X es un elemento neutro bajo la adición en $\mathbb{C}^X$.

En efecto, dada f en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, para cada x en X tenemos

$$(f + 0_X)(x) = f(x) + 0_X(x) = f(x) + 0$$

Demostración: el elemento neutro bajo la adición

Sea $0_X : X \to \mathbb{C}$ la función constante cero:

$$0_X(x) := 0 \qquad (x \in X).$$

Mostremos que 0_X es un elemento neutro bajo la adición en $\mathbb{C}^X$.

En efecto, dada f en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, para cada x en X tenemos

$$(f + 0_X)(x) = f(x) + 0_X(x) = f(x) + 0 =$$

Demostración: el elemento neutro bajo la adición

Sea $0_X \colon X \to \mathbb{C}$ la función constante cero:

$$0_X(x) := 0 \qquad (x \in X).$$

Mostremos que 0_X es un elemento neutro bajo la adición en $\mathbb{C}^X$.

En efecto, dada f en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, para cada x en X tenemos

$$(f + 0_X)(x) = f(x) + 0_X(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Hemos usado:

Demostración: el elemento neutro bajo la adición

Sea $0_X \colon X \to \mathbb{C}$ la función constante cero:

$$0_X(x) := 0 \qquad (x \in X).$$

Mostremos que 0_X es un elemento neutro bajo la adición en $\mathbb{C}^X$.

En efecto, dada f en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, para cada x en X tenemos

$$(f + 0_X)(x) = f(x) + 0_X(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Hemos usado: la definición de la adición en $\mathbb{C}^X$,

Demostración: el elemento neutro bajo la adición

Sea $0_X \colon X \to \mathbb{C}$ la función constante cero:

$$0_X(x) := 0 \qquad (x \in X).$$

Mostremos que 0_X es un elemento neutro bajo la adición en $\mathbb{C}^X$.

En efecto, dada f en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, para cada x en X tenemos

$$(f + 0_X)(x) = f(x) + 0_X(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Hemos usado: la definición de la adición en $\mathbb{C}^X$, la definición de la función 0_X,

Demostración: el elemento neutro bajo la adición

Sea $0_X \colon X \to \mathbb{C}$ la función constante cero:

$$0_X(x) := 0 \qquad (x \in X).$$

Mostremos que 0_X es un elemento neutro bajo la adición en $\mathbb{C}^X$.

En efecto, dada f en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, para cada x en X tenemos

$$(f + 0_X)(x) = f(x) + 0_X(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Hemos usado: la definición de la adición en $\mathbb{C}^X$, la definición de la función 0_X, la propiedad neutra del número 0.

Demostración: el elemento neutro bajo la adición

Sea $0_X \colon X \to \mathbb{C}$ la función constante cero:

$$0_X(x) := 0 \qquad (x \in X).$$

Mostremos que 0_X es un elemento neutro bajo la adición en $\mathbb{C}^X$.

En efecto, dada f en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, para cada x en X tenemos

$$(f + 0_X)(x) = f(x) + 0_X(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Hemos usado: la definición de la adición en $\mathbb{C}^X$, la definición de la función 0_X, la propiedad neutra del número 0.

De manera similar se muestra que $0_X + f = f$.

Demostración: la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Demostración: la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Es fácil ver que $\quad (\xi + \eta)f \in \mathbb{C}^X, \quad \xi f + \eta f \in \mathbb{C}^X.$

Demostración: la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Es fácil ver que $\quad (\xi + \eta)f \in \mathbb{C}^X, \quad \xi f + \eta f \in \mathbb{C}^X$.

Para cada x en X,

$$((\xi + \eta)f)(x)$$

Demostración: la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Es fácil ver que $(\xi + \eta)f \in \mathbb{C}^X, \quad \xi f + \eta f \in \mathbb{C}^X$.

Para cada x en X,

$$((\xi + \eta)f)(x) =$$

Demostración: la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Es fácil ver que $\quad (\xi + \eta) f \in \mathbb{C}^X, \quad \xi f + \eta f \in \mathbb{C}^X$.

Para cada x en X,

$$((\xi + \eta) f)(x) = (\xi + \eta) f(x)$$

Demostración: la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Es fácil ver que $\quad (\xi + \eta)f \in \mathbb{C}^X, \quad \xi f + \eta f \in \mathbb{C}^X$.

Para cada x en X,

$$((\xi + \eta)f)(x) = (\xi + \eta)f(x) =$$

Demostración: la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Es fácil ver que $\quad (\xi + \eta)f \in \mathbb{C}^X, \quad \xi f + \eta f \in \mathbb{C}^X$.

Para cada x en X,

$$((\xi + \eta)f)(x) = (\xi + \eta)f(x) = \xi f(x) + \eta f(x)$$

Demostración: la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Es fácil ver que $\quad (\xi + \eta)f \in \mathbb{C}^X, \quad \xi f + \eta f \in \mathbb{C}^X$.

Para cada x en X,

$$((\xi + \eta)f)(x) = (\xi + \eta)f(x) = \xi f(x) + \eta f(x) =$$

Demostración: la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Es fácil ver que $\quad (\xi + \eta) f \in \mathbb{C}^X, \quad \xi f + \eta f \in \mathbb{C}^X$.

Para cada x en X,

$$((\xi + \eta) f)(x) = (\xi + \eta) f(x) = \xi f(x) + \eta f(x) = (\xi f)(x) + (\eta f)(x)$$

Demostración: la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Es fácil ver que $\quad (\xi + \eta)f \in \mathbb{C}^X, \quad \xi f + \eta f \in \mathbb{C}^X$.

Para cada x en X,

$$((\xi + \eta)f)(x) = (\xi + \eta)f(x) = \xi f(x) + \eta f(x) = (\xi f)(x) + (\eta f)(x) =$$

Demostración: la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Es fácil ver que $\quad (\xi + \eta)f \in \mathbb{C}^X, \quad \xi f + \eta f \in \mathbb{C}^X$.

Para cada x en X,

$$((\xi + \eta)f)(x) = (\xi + \eta)f(x) = \xi f(x) + \eta f(x) = (\xi f)(x) + (\eta f)(x) = ((\xi f) + (\eta f))(x).$$

Demostración: la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Es fácil ver que $\quad (\xi + \eta)f \in \mathbb{C}^X, \quad \xi f + \eta f \in \mathbb{C}^X$.

Para cada x en X,

$$((\xi + \eta)f)(x) = (\xi + \eta)f(x) = \xi f(x) + \eta f(x) = (\xi f)(x) + (\eta f)(x) = ((\xi f) + (\eta f))(x).$$

Hemos usado:

Demostración: la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Es fácil ver que $\quad (\xi + \eta)f \in \mathbb{C}^X, \quad \xi f + \eta f \in \mathbb{C}^X$.

Para cada x en X,

$$((\xi + \eta)f)(x) = (\xi + \eta)f(x) = \xi f(x) + \eta f(x) = (\xi f)(x) + (\eta f)(x) = ((\xi f) + (\eta f))(x).$$

Hemos usado: la definición de las operaciones lineales en $\mathbb{C}^X$,

Demostración: la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Es fácil ver que $\quad (\xi + \eta)f \in \mathbb{C}^X, \quad \xi f + \eta f \in \mathbb{C}^X$.

Para cada x en X,

$$((\xi + \eta)f)(x) = (\xi + \eta)f(x) = \xi f(x) + \eta f(x) = (\xi f)(x) + (\eta f)(x) = ((\xi f) + (\eta f))(x).$$

Hemos usado: la definición de las operaciones lineales en $\mathbb{C}^X$, y la propiedad distributiva en $\mathbb{C}$.

Demostración: la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$.

Es fácil ver que $\quad (\xi + \eta)f \in \mathbb{C}^X, \quad \xi f + \eta f \in \mathbb{C}^X$.

Para cada x en X,

$$((\xi + \eta)f)(x) = (\xi + \eta)f(x) = \xi f(x) + \eta f(x) = (\xi f)(x) + (\eta f)(x) = ((\xi f) + (\eta f))(x).$$

Hemos usado: la definición de las operaciones lineales en $\mathbb{C}^X$, y la propiedad distributiva en $\mathbb{C}$.

Hemos mostrado que $(\xi + \eta)f = \xi f + \eta f$.

$\mathbb{C}^X$ como un álgebra compleja

En $\mathbb{C}^X$ se puede definir la multiplicación punto a punto:

$$(f\,g)(x) := f(x)g(x) \qquad (x \in X).$$

$\mathbb{C}^X$ como un álgebra compleja

En $\mathbb{C}^X$ se puede definir la multiplicación punto a punto:

$$(f\,g)(x) := f(x)g(x) \qquad (x \in X).$$

Esta operación es asociativa y conmutativa.

$\mathbb{C}^X$ como un álgebra compleja

En $\mathbb{C}^X$ se puede definir la multiplicación punto a punto:

$$(f\,g)(x) := f(x)g(x) \qquad (x \in X).$$

Esta operación es asociativa y conmutativa.

Un elemento neutro es la función constante uno:

$$1_X(x) := 1 \qquad (x \in X),$$

$\mathbb{C}^X$ como un álgebra compleja

En $\mathbb{C}^X$ se puede definir la multiplicación punto a punto:

$$(f\,g)(x) := f(x)g(x) \qquad (x \in X).$$

Esta operación es asociativa y conmutativa.

Un elemento neutro es la función constante uno:

$$1_X(x) := 1 \qquad (x \in X),$$

Ejercicio. Mostrar que $\mathbb{C}^X$ es un álgebra compleja asociativa y conmutativa con identidad.

Varios espacios de funciones

Hay muchos espacios importantes de funciones:

$$B(X), \qquad C(X), \qquad C_0(X), \qquad C_u(X), \qquad C^m(X), \qquad C^\infty(X),$$

$$\mathrm{H\ddot{o}l}^\alpha(X), \qquad \mathrm{Lip}(X), \qquad \mathrm{BV}(X), \qquad \mathrm{AC}(X), \qquad \text{etc.}$$

Varios espacios de funciones

Hay muchos espacios importantes de funciones:

$$B(X), \qquad C(X), \qquad C_0(X), \qquad C_u(X), \qquad C^m(X), \qquad C^\infty(X),$$

$$\mathrm{Höl}^\alpha(X), \qquad \mathrm{Lip}(X), \qquad \mathrm{BV}(X), \qquad \mathrm{AC}(X), \qquad \text{etc.}$$

Todos estos espacios son subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^X$.

Varios espacios de funciones

Hay muchos espacios importantes de funciones:

$$B(X), \qquad C(X), \qquad C_0(X), \qquad C_u(X), \qquad C^m(X), \qquad C^\infty(X),$$

$$\mathrm{Höl}^\alpha(X), \qquad \mathrm{Lip}(X), \qquad \mathrm{BV}(X), \qquad \mathrm{AC}(X), \qquad \text{etc.}$$

Todos estos espacios son subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^X$.

Para cada uno de estos espacios V, no es necesario verificar los axiomas de espacio vectorial.

Varios espacios de funciones

Hay muchos espacios importantes de funciones:

$$B(X), \qquad C(X), \qquad C_0(X), \qquad C_u(X), \qquad C^m(X), \qquad C^\infty(X),$$

$$\mathrm{Höl}^\alpha(X), \qquad \mathrm{Lip}(X), \qquad \mathrm{BV}(X), \qquad \mathrm{AC}(X), \qquad \text{etc.}$$

Todos estos espacios son subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^X$.

Para cada uno de estos espacios V, no es necesario verificar los axiomas de espacio vectorial.

Es suficiente verificar que V es cerrado bajo las operaciones lineales y que $0_X \in V$.