

# El espacio de sucesiones acotadas

**1 Definición.** Definimos  $N_\infty: \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, +\infty]$ , mediante la regla

$$N_\infty(a) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

Denotemos por  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  al conjunto

$$\{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}: N_\infty(a) < +\infty\},$$

y por  $\|\cdot\|_\infty$  a la función  $N_\infty$  restringida a  $\ell^\infty(\mathbb{N})$ .

**2 Observación.**  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  se puede ver como el espacio  $B(\mathbb{N})$  de funciones acotadas definidas en  $\mathbb{N}$  con valores en  $\mathbb{C}$ . Varias propiedades de  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  se pueden ver como casos particulares de propiedades de  $B(X)$ .

**3 Proposición.** La función  $N_\infty$  es subaditiva y homogénea absoluta. Si  $N_\infty(a) = 0$ , entonces  $a = 0_{\mathbb{N}}$ .

**4 Proposición.**  $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio vectorial normado.

**5 Proposición.** Sea  $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  y sea  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces  $|a_k| \leq \|a\|_\infty$ .

**6 Proposición.** El espacio  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  es completo.

*Demostración.* Sea  $A = (a^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $\ell^\infty(\mathbb{N})$ . Si  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p, q \geq m$  y  $k \in \mathbb{N}$ , entonces

$$|a_k^{(p)} - a_k^{(q)}| \leq \Omega_A(m). \quad (1)$$

Entonces para cada  $k$  en  $\mathbb{N}$  la sucesión  $(a_k^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{C}$  y por lo tanto tiene un límite  $b_k$ . En la desigualdad (1) pasamos al límite cuando  $q \rightarrow \infty$ . Obtenemos

$$|a_k^{(p)} - b_k| \leq \Omega_A(m).$$

Pamos al supremo sobre  $k$ :

$$N_\infty(a^{(p)} - b) \leq \Omega_A(m).$$

Luego  $b \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  y  $\|a^{(p)} - b\|_\infty \rightarrow 0$ . □