El espacio de sucesiones acotadas

1 Definición. Definimos $N_\infty \colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to [0, +\infty]$, mediante la regla

$$N_\infty(a) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Denotemos por $\ell^\infty(\mathbb{N})$ al conjunto

$$\{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\colon\ \ N_\infty(a) < +\infty\},$$

y por $\|\cdot\|_\infty$ a la función N_∞ restringida a $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

2 Observación. $\ell^\infty(\mathbb{N})$ se puede ver como el espacio $B(\mathbb{N})$ de funciones acotadas definidas en $\mathbb{N}$ con valores en $\mathbb{C}$. Varias propiedades de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ se pueden ver como casos particulares de propiedades de $B(X)$.

3 Proposición. *La función N_∞ es subaditiva y homogénea absoluta. Si $N_\infty(a) = 0$, entonces $a = 0_{\mathbb{N}}$.*

4 Proposición. *$(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio vectorial normado.*

5 Proposición. *Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ y sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces $|a_k| \le \|a\|_\infty$.*

6 Observación. Recordemos la definición del "medidor de Cauchy". Dada una sucesión $A = (a^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico X, denotemos por γ_A la sucesión definida mediante la siguiente regla:

$$\gamma_A(m) \coloneqq \sup_{p,q\ge m} d_X(a^{(p)}, a^{(q)}).$$

De esta definición se sigue que

$$\forall p, q \ge m \qquad d_X(a^{(p)}, a^{(q)}) \le \gamma_A(m).$$

Sabemos que A es de Cauchy si, y solo si,

$$\lim_{m\to\infty} \gamma_A(m) = 0.$$

7 Proposición. *El espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es completo.*

Demostración. Sea $A = (a^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Si $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geq m$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$|a_k^{(p)} - a_k^{(q)}| \leq \|a^{(p)} - a^{(q)}\|_\infty \leq \gamma_A(m). \tag{1}$$

Entonces para cada k en $\mathbb{N}$ la sucesión $(a_k^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ y por lo tanto tiene un límite en $\mathbb{C}$. Denotemos este límite por b_k. En la desigualdad (1) pasamos al límite cuando $q \to \infty$. Obtenemos

$$|a_k^{(p)} - b_k| \leq \gamma_A(m).$$

Pamos al supremo sobre k:

$$N_\infty(a^{(p)} - b) \leq \gamma_A(m).$$

Luego $b \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ y $\|a^{(p)} - b\|_\infty \to 0$. □