El espacio $C_b(X)$ de las funciones acotadas continuas
(un tema de la unidad "Espacios normados")

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

22 de septiembre de 2022

Plan

Objetivo:

- introducir el espacio $C_b(X)$ y demostrar su completez.

Objetivo:

- introducir el espacio $C_b(X)$ y demostrar su completez.

Prerrequisitos:

- el espacio normado $B(X)$ y su completez,
- continuidad de funciones.

Repaso: definición del espacio $B(X)$

Sabemos que $\mathbb{C}^X$ es un espacio vectorial complejo.

Repaso: definición del espacio $B(X)$

Sabemos que $\mathbb{C}^X$ es un espacio vectorial complejo.

Dada $f\colon X \to \mathbb{C}$,

$$N(f) := \sup_{x \in X} |f(x)| := \sup\Big\{v \in [0, +\infty): \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

Repaso: definición del espacio $B(X)$

Sabemos que $\mathbb{C}^X$ es un espacio vectorial complejo.

Dada $f\colon X \to \mathbb{C}$,

$$N(f) := \sup_{x\in X} |f(x)| := \sup\Big\{v \in [0,+\infty)\colon \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

Proposición

N es una norma extendida en $\mathbb{C}^X$.

Repaso: el espacio $B(X)$

$$B(X) \;:=\; \{f \in \mathbb{C}^X : \; N(f) < +\infty\}.$$

Repaso: el espacio $B(X)$

$$B(X) \;:=\; \{f \in \mathbb{C}^X :\; N(f) < +\infty\}.$$

La norma $\|\cdot\|_{\sup}$ en $B(X)$ se define como la restricción de N.

$$\|f\|_{\sup} \;:=\; \sup\Big\{v \in [0,+\infty) :\quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

Repaso: el espacio $B(X)$

$$B(X) \;:=\; \{f \in \mathbb{C}^X :\; N(f) < +\infty\}.$$

La norma $\|\cdot\|_{\sup}$ en $B(X)$ se define como la restricción de N.

$$\|f\|_{\sup} \;:=\; \sup\Big\{v \in [0,+\infty) : \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

Proposición

$B(X)$ es un espacio normado.

Repaso: el espacio $B(X)$

$$B(X) \;:=\; \{f \in \mathbb{C}^X \colon\; N(f) < +\infty\}.$$

La norma $\|\cdot\|_{\sup}$ en $B(X)$ se define como la restricción de N.

$$\|f\|_{\sup} \;:=\; \sup\Big\{v \in [0, +\infty) \colon \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

Proposición

$B(X)$ es un espacio normado.

Proposición

$B(X)$ es completo.

Repaso: la norma-supremo domina a los valores en cada punto

Proposición

Sean $f \in B(X)$, $a \in X$. Entonces

$$|f(a)| \leq \|f\|_{\mathrm{sup}}.$$

Repaso: la norma-supremo domina a los valores en cada punto

Proposición

Sean $f \in B(X)$, $a \in X$. Entonces
$$|f(a)| \le \|f\|_{\sup}.$$

Se sigue de la definición de $\|f\|_{\sup}$.

Repaso: la norma-supremo domina a los valores en cada punto

Proposición

Sean $f \in B(X)$, $a \in X$. Entonces

$$|f(a)| \leq \|f\|_{\mathrm{sup}}.$$

Se sigue de la definición de $\|f\|_{\mathrm{sup}}$.

Corolario

Sean $g, h \in B(X)$, $a \in X$. Entonces $|g(a) - h(a)| \leq \|g - h\|_{\mathrm{sup}}$.

Repaso: la norma-supremo domina a los valores en cada punto

Proposición

Sean $f \in B(X)$, $a \in X$. Entonces

$$|f(a)| \leq \|f\|_{\sup}.$$

Se sigue de la definición de $\|f\|_{\sup}$.

Corolario

Sean $g, h \in B(X)$, $a \in X$. Entonces $|g(a) - h(a)| \leq \|g - h\|_{\sup}$.

Demostración. Notamos que $|g(a) - h(a)| = |(g - h)(a)|$, aplicamos la proposición a la función $f = g - h$.

Plan

Definición del espacio $C_b(X)$

En este tema suponemos que (X, τ) es un espacio topológico.

Definición del espacio $C_b(X)$

En este tema suponemos que (X,τ) es un espacio topológico.

$C(X) \coloneqq C(X,\mathbb{C}) \coloneqq$ el conjunto de las funciones continuas $X \to \mathbb{C}$.

Definición del espacio $C_b(X)$

En este tema suponemos que (X, τ) es un espacio topológico.

$C(X) := C(X, \mathbb{C}) :=$ el conjunto de las funciones continuas $X \to \mathbb{C}$.

$$C_b(X) := B(X) \cap C(X).$$

$C_b(X) \leq B(X)$

Proposición

$C_b(X)$ es un subespacio vectorial de $B(X)$.

$C_b(X) \leq B(X)$

Proposición

$C_b(X)$ es un subespacio vectorial de $B(X)$.

Demostración. Se sigue de las propiedades algebraicas de las funciones continuas.

$C_b(X) \leq B(X)$

Proposición

$C_b(X)$ es un subespacio vectorial de $B(X)$.

Demostración. Se sigue de las propiedades algebraicas de las funciones continuas.

Si $f, g \in C(X)$, entonces $f + g \in C(X)$.

$C_b(X) \leq B(X)$

Proposición

$C_b(X)$ es un subespacio vectorial de $B(X)$.

Demostración. Se sigue de las propiedades algebraicas de las funciones continuas.

Si $f, g \in C(X)$, entonces $f + g \in C(X)$.

Si $f \in C(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\lambda f \in C(X)$.

$C_b(X) \leq B(X)$

Proposición

$C_b(X)$ es un subespacio vectorial de $B(X)$.

Demostración. Se sigue de las propiedades algebraicas de las funciones continuas.

Si $f, g \in C(X)$, entonces $f + g \in C(X)$.

Si $f \in C(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\lambda f \in C(X)$.

$0_X \in C(X)$.

Repaso: continuidad en cada punto

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$. Sabemos que

$$f \text{ es continuas} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in X \quad \bigl(f \text{ es continua en } a\bigr).$$

Repaso: continuidad en cada punto

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$. Sabemos que

$$f \text{ es continuas} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in X \quad \big(f \text{ es continua en } a\big).$$

Denotemos por $\tau(a)$ el conjunto de las vecindades abiertas de a:

$$\tau(a) \in \big\{V \in \tau\colon \quad a \in V\big\}.$$

Repaso: continuidad en cada punto

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$. Sabemos que

$$f \text{ es continuas} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in X \quad \bigl(f \text{ es continua en } a\bigr).$$

Denotemos por $\tau(a)$ el conjunto de las vecindades abiertas de a:

$$\tau(a) \in \bigl\{V \in \tau\colon \quad a \in V\bigr\}.$$

La condición que f es continua en a significa lo siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists V \in \tau(a) \qquad \forall x \in V \qquad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$C_b(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$

Proposición

$C_b(X)$ es cerrado en $B(X)$.

Demostración

Supongamos que $f \in \operatorname{clos}(C_b(X))$. Demostremos que $f \in C_b(X)$.

Demostración

Supongamos que $f \in \operatorname{clos}(C_b(X))$. Demostremos que $f \in C_b(X)$.

Sea $a \in X$. Demostremos que f es continua en a.

Demostración

Supongamos que $f \in \operatorname{clos}(C_b(X))$. Demostremos que $f \in C_b(X)$.

Sea $a \in X$. Demostremos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$.

Demostración

Supongamos que $f \in \text{clos}(C_b(X))$. Demostremos que $f \in C_b(X)$.

Sea $a \in X$. Demostremos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $f \in \text{clos}(C_b(X))$, encontramos $g \in C_b(X)$ tal que $\|f - g\|_{\text{sup}} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Demostración

Supongamos que $f \in \text{clos}(C_b(X))$. Demostremos que $f \in C_b(X)$.

Sea $a \in X$. Demostremos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $f \in \text{clos}(C_b(X))$, encontramos $g \in C_b(X)$ tal que $\|f - g\|_{\text{sup}} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Como g es continua en a, encontramos V en $\tau(a)$ tal que $\forall x \in V \qquad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Demostración

Supongamos que $f \in \operatorname{clos}(C_b(X))$. Demostremos que $f \in C_b(X)$.

Sea $a \in X$. Demostremos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $f \in \operatorname{clos}(C_b(X))$, encontramos $g \in C_b(X)$ tal que $\|f - g\|_{\sup} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Como g es continua en a, encontramos V en $\tau(a)$ tal que $\forall x \in V \qquad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Para cada x en V tenemos

Demostración

Supongamos que $f \in \mathrm{clos}(C_b(X))$. Demostremos que $f \in C_b(X)$.

Sea $a \in X$. Demostremos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $f \in \mathrm{clos}(C_b(X))$, encontramos $g \in C_b(X)$ tal que $\|f - g\|_{\mathrm{sup}} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Como g es continua en a, encontramos V en $\tau(a)$ tal que $\forall x \in V \qquad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Para cada x en V tenemos

$$|f(x) - f(a)|$$

Demostración

Supongamos que $f \in \mathrm{clos}(C_b(X))$. Demostremos que $f \in C_b(X)$.

Sea $a \in X$. Demostremos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $f \in \mathrm{clos}(C_b(X))$, encontramos $g \in C_b(X)$ tal que $\|f - g\|_{\sup} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Como g es continua en a, encontramos V en $\tau(a)$ tal que $\forall x \in V \qquad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Para cada x en V tenemos

$$|f(x) - f(a)| \leq$$

Demostración

Supongamos que $f \in \text{clos}(C_b(X))$. Demostremos que $f \in C_b(X)$.

Sea $a \in X$. Demostremos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $f \in \text{clos}(C_b(X))$, encontramos $g \in C_b(X)$ tal que $\|f - g\|_{\text{sup}} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Como g es continua en a, encontramos V en $\tau(a)$ tal que $\forall x \in V \qquad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Para cada x en V tenemos

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| + |g(a) - f(a)|$$

Demostración

Supongamos que $f \in \mathrm{clos}(C_b(X))$. Demostremos que $f \in C_b(X)$.

Sea $a \in X$. Demostremos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $f \in \mathrm{clos}(C_b(X))$, encontramos $g \in C_b(X)$ tal que $\|f - g\|_{\mathrm{sup}} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Como g es continua en a, encontramos V en $\tau(a)$ tal que $\forall x \in V \qquad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Para cada x en V tenemos

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &\le |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| + |g(a) - f(a)| \\
&\le
\end{aligned}
$$

Demostración

Supongamos que $f \in \mathrm{clos}(C_b(X))$. Demostremos que $f \in C_b(X)$.

Sea $a \in X$. Demostremos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $f \in \mathrm{clos}(C_b(X))$, encontramos $g \in C_b(X)$ tal que $\|f - g\|_{\mathrm{sup}} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Como g es continua en a, encontramos V en $\tau(a)$ tal que $\forall x \in V \qquad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Para cada x en V tenemos

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| + |g(a) - f(a)| \\
&\leq \|f - g\|_{\mathrm{sup}} + |g(x) - g(a)| + \|f - g\|_{\mathrm{sup}}
\end{aligned}
$$

Demostración

Supongamos que $f \in \operatorname{clos}(C_b(X))$. Demostremos que $f \in C_b(X)$.

Sea $a \in X$. Demostremos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $f \in \operatorname{clos}(C_b(X))$, encontramos $g \in C_b(X)$ tal que $\|f - g\|_{\sup} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Como g es continua en a, encontramos V en $\tau(a)$ tal que $\forall x \in V \qquad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Para cada x en V tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| + |g(a) - f(a)| \\ &\leq \|f - g\|_{\sup} + |g(x) - g(a)| + \|f - g\|_{\sup} < \end{aligned}$$

Demostración

Supongamos que $f \in \operatorname{clos}(C_b(X))$. Demostremos que $f \in C_b(X)$.

Sea $a \in X$. Demostremos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $f \in \operatorname{clos}(C_b(X))$, encontramos $g \in C_b(X)$ tal que $\|f - g\|_{\sup} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Como g es continua en a, encontramos V en $\tau(a)$ tal que $\forall x \in V \qquad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Para cada x en V tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| + |g(a) - f(a)| \\ &\leq \|f - g\|_{\sup} + |g(x) - g(a)| + \|f - g\|_{\sup} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Demostración

Supongamos que $f \in \operatorname{clos}(C_b(X))$. Demostremos que $f \in C_b(X)$.

Sea $a \in X$. Demostremos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $f \in \operatorname{clos}(C_b(X))$, encontramos $g \in C_b(X)$ tal que $\|f - g\|_{\sup} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Como g es continua en a, encontramos V en $\tau(a)$ tal que $\forall x \in V \qquad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Para cada x en V tenemos

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &\le |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| + |g(a) - f(a)| \\
&\le \|f - g\|_{\sup} + |g(x) - g(a)| + \|f - g\|_{\sup} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} =
\end{aligned}
$$

Demostración

Supongamos que $f \in \mathrm{clos}(C_b(X))$. Demostremos que $f \in C_b(X)$.

Sea $a \in X$. Demostremos que f es continua en a. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $f \in \mathrm{clos}(C_b(X))$, encontramos $g \in C_b(X)$ tal que $\|f - g\|_{\sup} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Como g es continua en a, encontramos V en $\tau(a)$ tal que $\forall x \in V \qquad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Para cada x en V tenemos

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| + |g(a) - f(a)| \\ &\leq \|f - g\|_{\sup} + |g(x) - g(a)| + \|f - g\|_{\sup} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Idea de demostración

$f(x)$ ———————— $f(a)$

Idea de demostración

$$\begin{tikzcd}
g(x) \arrow[r] & g(a) \arrow[d] \\
f(x) \arrow[u] \arrow[r, dash] & f(a)
\end{tikzcd}$$

Funciones continuas en un compacto

Proposición

Sea K un compacto. Entonces $C(K) \subseteq B(X)$ y

$$C_b(K) = C(K).$$

Funciones continuas en un compacto

Proposición

Sea K un compacto. Entonces $C(K) \subseteq B(X)$ y

$$C_b(K) = C(K).$$

Demostración.

Funciones continuas en un compacto

Proposición

Sea K un compacto. Entonces $C(K) \subseteq B(X)$ y

$$C_b(K) = C(K).$$

Demostración.

Sea $f \in C(K, \mathbb{C})$.

Funciones continuas en un compacto

Proposición

Sea K un compacto. Entonces $C(K) \subseteq B(X)$ y

$$C_b(K) = C(K).$$

Demostración.

Sea $f \in C(K, \mathbb{C})$. Entonces $f[K]$ es un compacto en $\mathbb{C}$.

Funciones continuas en un compacto

Proposición

Sea K un compacto. Entonces $C(K) \subseteq B(X)$ y

$$C_b(K) = C(K).$$

Demostración.

Sea $f \in C(K, \mathbb{C})$. Entonces $f[K]$ es un compacto en $\mathbb{C}$.

Por lo tanto, $f[K]$ es totalmente acotado.

Funciones continuas en un compacto

Proposición

Sea K un compacto. Entonces $C(K) \subseteq B(X)$ y

$$C_b(K) = C(K).$$

Demostración.

Sea $f \in C(K, \mathbb{C})$. Entonces $f[K]$ es un compacto en $\mathbb{C}$.

Por lo tanto, $f[K]$ es totalmente acotado. Luego $f[K]$ es acotado.

Plan

El espacio de las funciones continuas que tienden a 0 en el infinito

Sea X un espacio topológico localmente compacto.

El espacio de las funciones continuas que tienden a 0 en el infinito

Sea X un espacio topológico localmente compacto.

$$
\begin{aligned}
C_0(X) := \Big\{ f \in C(X) \colon \quad & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \subseteq X \\
& \big(K \quad \text{es compacto} \big) \quad \wedge \quad \big(\forall x \in X \setminus K \quad |f(x)| < \varepsilon \big) \Big\}.
\end{aligned}
$$

El espacio de las funciones continuas que tienden a 0 en el infinito

Sea X un espacio topológico localmente compacto.

$$C_0(X) := \Big\{ f \in C(X) \colon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \subseteq X$$

$$\big(K \quad \text{es compacto}\big) \quad \wedge \quad \big(\forall x \in X \setminus K \quad |f(x)| < \varepsilon\big) \Big\}.$$

Ejercicio. Sea X un espacio topológico localmente compacto.
Demostrar que $C_0(X) \subseteq B(X)$.
Demostrar que $C_0(X)$ es cerrado en $B(X)$.

El espacio de las funciones acotadas uniformemente continuas

Sea (X, d) un espacio métrico.

$$C_u(X) := \Big\{ f \in \mathbb{C}^X : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$

$$\forall a, b \in X \quad \big(d(a, b) < \delta \quad \Longleftrightarrow \quad |f(a) - f(b)| < \varepsilon \big) \Big\}.$$

El espacio de las funciones acotadas uniformemente continuas

Sea (X, d) un espacio métrico.

$$C_u(X) := \Big\{ f \in \mathbb{C}^X : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$

$$\forall a, b \in X \quad \big(d(a, b) < \delta \quad \Longleftrightarrow \quad |f(a) - f(b)| < \varepsilon \big) \Big\}.$$

$$C_{bu}(X) := C_u(X) \cap B(X).$$

Ejercicio. Sea (X, d) un espacio métrico.

Demostrar que $C_{bu}(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$.