Fórmula para $A \setminus (B \setminus C)$

Ada Sofía Estudiántez Avanzádez

Recordemos las definiciones de la unión, intersección y diferencia de conjuntos:

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\iff \bigl(x \in A\bigr) \ \vee\ \bigl(x \in B\bigr); \\ x \in A \cap B &\iff \bigl(x \in A\bigr) \ \wedge\ \bigl(x \in B\bigr); \\ x \in A \setminus B &\iff \bigl(x \in A\bigr) \ \wedge\ \overline{\bigl(x \in B\bigr)}. \end{aligned}$$

1 Proposición. *Sean A, B, C algunos conjuntos. Entonces*

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

La demostración más natural, basada en ciertas propiedades de operaciones lógicas, se puede encontrar en otro texto. A continuación están escritas otras dos demostraciones.

Demostración basada en tablas de verdad. Usemos las siguientes notaciones breves:

$$a_x \coloneqq (x \in A), \qquad b_x \coloneqq (x \in B), \qquad c_x \coloneqq (x \in C).$$

Entonces

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \setminus C) &\iff a_x \wedge \overline{b_x \wedge \overline{c_x}}; \\ x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C) &\iff \bigl(a_x \wedge \overline{b_x}\bigr) \vee \bigl(a_x \wedge c_x\bigr). \end{aligned}$$

Falta demostrar que

$$a_x \wedge \overline{b_x \wedge \overline{c_x}} \iff \bigl(a_x \wedge \overline{b_x}\bigr) \vee \bigl(a_x \wedge c_x\bigr). \tag{1}$$

Lo haremos con tablas de verdad. Hay que considerar todas las 8 opciones posibles para a_x, b_x, c_x:

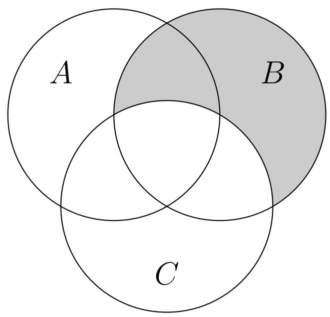
a_x	b_x	c_x	$b_x \wedge \overline{c_x}$	$\overline{b_x \wedge \overline{c_x}}$	$a_x \wedge \overline{b_x \wedge \overline{c_x}}$	$a_x \wedge \overline{b_x}$	$a_x \wedge c_x$	$\bigl(a_x \wedge \overline{b_x}\bigr) \vee \bigl(a_x \wedge c_x\bigr)$
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	1

Observamos que la columna verde coincide con la azul, con lo que acabamos de demostrar la equivalencia (1). $\square$

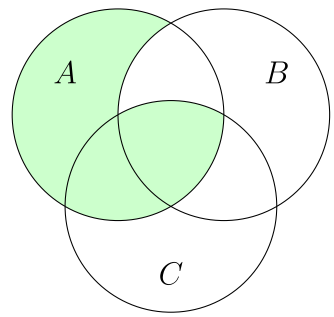
Demostración por medio de diagramas de Euler–Venn. En la demostración anterior tuvimos que considerar 8 opciones posibles; lo mismo se puede hacer de manera más evidente con diagramas de Euler–Venn. A cada una de las 8 opciones le corresponde un pedazo del plano.

Primero dibujemos $B \setminus C$ y $A \setminus (B \setminus C)$:

$B \setminus C$

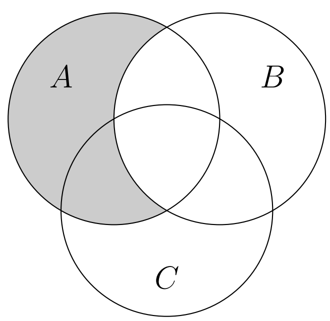


$A \setminus (B \setminus C)$

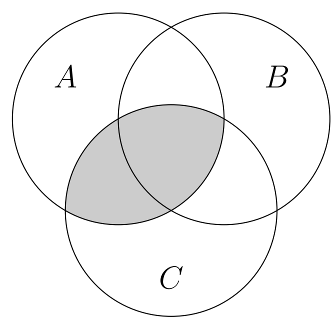


Por otro lado, dibujemos $A \setminus B$, $A \cap C$ y $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$:

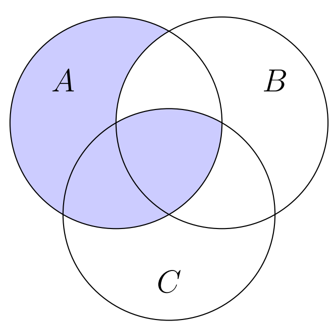
$A \setminus B$



$A \cap C$



$(A \setminus B) \cup (A \cap C)$



El dibujo verde coincide con el dibujo azul. $\square$