Una fórmula para la diferencia de conjuntos

Pepito Estudiántez Principiántez

21 de julio de 2013

Recordemos la definición de la diferencia de conjuntos:

Definición 1 (diferencia de conjuntos)**.** Sean A y B algunos conjuntos. Entonces su *diferencia* $A \setminus B$ consiste de todos los elementos que pertenecen al conjunto A y al mismo tiempo no pertenecen al conjunto B:

$$x \in A \setminus B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(x \in A\big) \ \wedge \ \overline{\big(x \in B\big)}. \tag{1}$$

Proposición 1. *Sean A, B, C algunos conjuntos. Entonces*

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C). \tag{2}$$

Demostración. Mostremos que un elemento arbitrario x pertenece al lado izquierdo de (2) si, y sólo si, este elemento pertenece al lado derecho de (2):

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \setminus C) \quad &\overset{\text{(i)}}{\Longleftrightarrow} \quad \big(x \in A\big) \ \wedge \ \overline{x \in B \setminus C} \\
&\overset{\text{(ii)}}{\Longleftrightarrow} \quad \big(x \in A\big) \ \wedge \ \overline{\big(x \in B\big) \ \wedge \ \overline{\big(x \in C\big)}} \\
&\overset{\text{(iii)}}{\Longleftrightarrow} \quad \big(x \in A\big) \ \wedge \ \left(\overline{\big(x \in B\big)} \ \vee \ \overline{\overline{\big(x \in C\big)}}\right) \\
&\overset{\text{(iv)}}{\Longleftrightarrow} \quad \big(x \in A\big) \ \wedge \ \left(\overline{\big(x \in B\big)} \ \vee \ \big(x \in C\big)\right) \\
&\overset{\text{(v)}}{\Longleftrightarrow} \quad \left(\big(x \in A\big) \ \wedge \ \overline{\big(x \in B\big)}\right) \quad \vee \quad \left(\big(x \in A\big) \ \wedge \ \big(x \in C\big)\right) \\
&\overset{\text{(vi)}}{\Longleftrightarrow} \quad x \in A \setminus B \quad \vee \quad x \in A \cap C \\
&\overset{\text{(vii)}}{\Longleftrightarrow} \quad x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}$$

Justificación de los pasos:

(i) Por la definición (1) aplicada a los conjuntos A y $B \setminus C$.

(ii) Por la definición (1) aplicada a los conjuntos B y C.

(iii) Por la ley de De Morgan

$$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$$

aplicada a las proposiciones $x \in B$ y $\overline{x \in C}$.

(iv) Por la ley de la eliminación de negación doble, aplicada a la proposición $x \in C$.

(v) Por la ley distributiva $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ aplicada a las proposiciones $x \in A$, $\overline{x \in B}$, $x \in C$.

(vi) Por la definición de la diferencia y de la unión de dos conjuntos.

(vii) Por la definición de la intersección de dos conjuntos.

$\square$