Engrape aquí
No doble

Análisis Real, maestría. Tarea 1. Variante α.

Temas preliminares de Análisis Real: operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, supremo e ínfimo de un conjunto, funciones acotadas, el límite de una función.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale hasta el 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \oplus q \equiv (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q) \equiv (p \vee q) \wedge \overline{(p \wedge q)}.$$

II. Definimos la **diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B como

$$A \triangle B = \{x\colon \ (x \in A) \oplus (x \in B)\}.$$

Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Ejercicio 2. *4 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \vee q) \wedge r = (p \wedge q) \vee (q \wedge r).$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq x^2 - 4x + 1, \quad B = (-2, 1].$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq 3 - |x - 1|, \quad B = (2, 4).$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $[2, 5)$, $B = (-1, 1/2)$.

Ejercicio 6. *2 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x) \coloneqq x^2 - 4y^2, \qquad B = (0, +\infty).$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Se considera la **sucesión monótona de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left(-3 + \frac{1}{n},\, 2\right].$$

I. Calcular la unión $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k-1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $A_0 \coloneqq \emptyset$.

III. Verificar directamente las siguientes igualdades (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = (\sqrt{3}, 5) \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{3 \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Funciones acotadas. En el dominio $D = [1, 4]$ consideremos la función $f(x) = x^2 - 4x - 5$. Encontrar un $C > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant C$ para cada x en D.

Ejercicio 10. *2 %.*
Usando **la definición del límite de una función** demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = b$, donde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - x - 3, \qquad a = 2, \qquad b = -1.$$

Engrape aquí
No doble

Análisis Real, maestría. Tarea 1. Variante β.

Temas preliminares de Análisis Real: operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, supremo e ínfimo de un conjunto, funciones acotadas, el límite de una función.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale hasta el 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \lor (\overline{p} \land q) \equiv p \lor q.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \cup (B \setminus A) = A \cup B.$$

Ejercicio 2. *4 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \oplus q) \to ((p \oplus r) \lor (r \oplus q)) \equiv 1.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq -x^2 - 2x + 1, \quad B = [-2, 0).$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq |x + 2| - 2, \quad B = (-2, 1].$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $[-1, 4]$, $B = (0, 2]$.

Ejercicio 6. *2 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x) \coloneqq 4x - y^2, \qquad B = (-\infty, 0].$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Se considera la **sucesión monótona de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left(-1 - \frac{1}{n}, 3\right].$$

I. Calcular la intersección $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k+1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

III. Verificar directamente la siguiente igualdad (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(A_1) = \mu(B) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = [-4, \sqrt{11}] \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Ejercicio 9. *1 %.*
Funciones acotadas. En el dominio $D = [-3, -1]$ consideremos la función $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$. Encontrar un $C > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant C$ para cada x en D.

Ejercicio 10. *2 %.*
Usando **la definición del límite de una función** demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = b$, donde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x^2 + x + 1, \qquad a = -1, \qquad b = 2.$$

Engrape aquí
No doble

Análisis Real, maestría. Tarea 1. Variante 1 GRJC.

Temas preliminares de Análisis Real: operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, supremo e ínfimo de un conjunto, funciones acotadas, el límite de una función.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale hasta el 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \to (p \vee q) \equiv 1.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \subseteq A \cup B.$$

Ejercicio 2. *4 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r).$$

II. Definimos la diferencia simétrica de conjuntos mediante la operación lógica $\oplus$:

$$A \triangle B := \{x\colon\ x \in A \ \oplus\ x \in B\}.$$

Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2 + 6x + 6, \quad B = [-1, 1).$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := 1 - |x + 2|, \quad B = [-2, 0).$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $(3, 5)$, $B = (-1, 1)$.

Ejercicio 6. *2 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x) \coloneqq x^2 - y^2, \qquad B = (-\infty, 1).$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Se considera la **sucesión monótona de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left(-3 + \frac{1}{n}, 2\right].$$

I. Calcular la unión $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k-1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $A_0 \coloneqq \emptyset$.

III. Verificar directamente las siguientes igualdades (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = (2, 5] \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{2(-1)^n - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Se recomienda partir B en varios conjuntos cuyos supremos e ínfimos se calculan fácilmente.

Ejercicio 9. *1 %.*
Funciones acotadas. En el dominio $D = [-1, 2]$ consideremos la función $f(x) = -x^2 - 2x + 5$. Encontrar un $C > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant C$ para cada x en D.

Ejercicio 10. *2 %.*
Usando **la definición del límite de una función** demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, donde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x^2 + 3x + 2, \qquad a = 4, \qquad b = -2.$$

Engrape aquí
No doble

Análisis Real, maestría. Tarea 1. Variante 2 GSA.

Temas preliminares de Análisis Real: operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, supremo e ínfimo de un conjunto, funciones acotadas, el límite de una función.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale hasta el 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \wedge q) \to p \equiv 1.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \cap B \subseteq A.$$

Ejercicio 2. *4 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \wedge \overline{q}) \to ((p \wedge \overline{r}) \vee (r \wedge \overline{q})) \equiv 1.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \setminus B \subseteq (A \setminus C) \cup (C \setminus B).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := -x^2 - 4x - 3, \quad B = (-3, -2].$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := |x + 1| - 3, \quad B = (-2, 1].$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $(-1, 2)$, $B = (0, 4]$.

Ejercicio 6. *2 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x) \coloneqq \frac{x^2}{4} + y^2, \qquad B = [1, +\infty).$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Se considera la **sucesión monótona de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left(-5,\, 1 + \frac{1}{n}\right].$$

I. Calcular la intersección $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k+1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

III. Verificar directamente la siguiente igualdad (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(A_1) = \mu(B) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = [3, \sqrt{6}) \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Se recomienda partir B en varios conjuntos cuyos supremos e ínfimos se calculan fácilmente.

Ejercicio 9. *1 %.*
Funciones acotadas. En el dominio $D = [-1, 4]$ consideremos la función $f(x) = x^2 - 6x - 4$. Encontrar un $C > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant C$ para cada x en D.

Ejercicio 10. *2 %.*
Usando **la definición del límite de una función** demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = b$, donde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = -2x^2 + x + 1, \qquad a = -2, \qquad b = -9.$$

Engrape aquí
No doble

Análisis Real, maestría. Tarea 1. Variante 3 RBJA.

Temas preliminares de Análisis Real: operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, supremo e ínfimo de un conjunto, funciones acotadas, el límite de una función.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale hasta el 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

Ejercicio 2. *4 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \oplus q) \to ((p \oplus r) \vee (r \oplus q)) \equiv 1.$$

II. Definimos la diferencia simétrica de conjuntos mediante la operación lógica $\oplus$:

$$A \triangle B \coloneqq \{x\colon\ x \in A \ \oplus\ x \in B\}.$$

Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq x^2 - 6x + 8, \quad B = (0, 2].$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq 2 - |x - 1|, \quad B = (-1, 0).$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $(1, 4]$, $B = (-3, 1/2]$.

Ejercicio 6. *2 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x) \coloneqq x^2 - 4x + y^2, \qquad B = (-\infty, 9].$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Se considera la **sucesión monótona de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left[2 + \frac{1}{n}, 4\right].$$

I. Calcular la unión $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k-1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $A_0 \coloneqq \emptyset$.

III. Verificar directamente las siguientes igualdades (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = (-1, 2] \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{3(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Se recomienda partir B en varios conjuntos cuyos supremos e ínfimos se calculan fácilmente.

Ejercicio 9. *1 %.*
Funciones acotadas. En el dominio $D = [-3, 1]$ consideremos la función $f(x) = -x^2 + 8x - 7$. Encontrar un $C > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant C$ para cada x en D.

Ejercicio 10. *2 %.*
Usando **la definición del límite de una función** demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, donde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x^2 + 5x + 5, \qquad a = 3, \qquad b = 11.$$

Engrape aquí
No doble

Análisis Real, maestría. Tarea 1. Variante 4 RNAJ.

Temas preliminares de Análisis Real: operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, supremo e ínfimo de un conjunto, funciones acotadas, el límite de una función.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale hasta el 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \lor (p \land q) \equiv p.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

Ejercicio 2. *4 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \land \overline{(q \lor r)} \equiv (p \land \overline{q}) \land (p \land \overline{r}).$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := -x^2 - 2x, \quad B = [-1, 1).$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := |x - 2| - 1, \quad B = (-1, 2].$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $[-3, 1)$, $B = [0, 1)$.

Ejercicio 6. *2 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x) \coloneqq -x + y^2, \qquad B = (-\infty, 1].$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Se considera la **sucesión monótona de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left(-2 - \frac{1}{n}, -1\right].$$

I. Calcular la intersección $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k+1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

III. Verificar directamente la siguiente igualdad (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(A_1) = \mu(B) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = [5, 8) \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{(-1)^n - \frac{2}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Se recomienda partir B en varios conjuntos cuyos supremos e ínfimos se calculan fácilmente.

Ejercicio 9. *1 %.*
Funciones acotadas. En el dominio $D = [-3, 0]$ consideremos la función $f(x) = 2x^2 + 8x + 2$. Encontrar un $C > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant C$ para cada x en D.

Ejercicio 10. *2 %.*
Usando **la definición del límite de una función** demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = b$, donde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x^2 - 3x + 2, \qquad a = 2, \qquad b = -8.$$

Análisis Real, maestría. Tarea 1. Variante 5 TPUD.

Temas preliminares de Análisis Real: operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, supremo e ínfimo de un conjunto, funciones acotadas, el límite de una función.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale hasta el 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \to q \equiv (p \vee q) \leftrightarrow q.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cup B = B.$$

Ejercicio 2. *4 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \wedge \overline{(q \wedge r)} \equiv (p \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge \overline{r}).$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2 + 2x - 1, \quad B = (0, 2].$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := 1 - |x + 3|, \quad B = (-2, -1].$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $[-1, 3)$, $B = (-2, 1)$.

Ejercicio 6. *2 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x) \coloneqq x^2 + y^2 - 6y, \qquad B = (13, +\infty).$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Se considera la **sucesión monótona de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left(-1, 3 - \frac{1}{n}\right].$$

I. Calcular la unión $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k-1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $A_0 \coloneqq \emptyset$.

III. Verificar directamente las siguientes igualdades (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = (-2, 3] \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{\frac{1}{n} + \cos\frac{n\pi}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Se recomienda partir B en varios conjuntos cuyos supremos e ínfimos se calculan fácilmente.

Ejercicio 9. *1 %.*
Funciones acotadas. En el dominio $D = [2, 4]$ consideremos la función $f(x) = -x^2 + 6x + 7$. Encontrar un $C > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant C$ para cada x en D.

Ejercicio 10. *2 %.*
Usando **la definición del límite de una función** demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, donde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1, \qquad a = 3, \qquad b = -28.$$

Engrape aquí
No doble

Análisis Real, maestría. Tarea 1. Variante 6 oyentes.

Temas preliminares de Análisis Real: operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, supremo e ínfimo de un conjunto, funciones acotadas, el límite de una función.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale hasta el 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \to q \equiv (p \wedge q) \leftrightarrow p.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B = A.$$

Ejercicio 2. *4 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \wedge \overline{q}) \vee r \equiv= (p \vee r) \wedge \overline{(q \wedge \overline{r})}.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := -x^2 - 4x - 5, \quad B = [-5, -1).$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := |x + 1| - 3, \quad B = (-2, 2].$$

Ejercicio 5. *1 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $[-4, -2]$, $B = (0, 1]$.

Ejercicio 6. *2 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x) \coloneqq x - y^2, \qquad B = (3, +\infty).$$

Ejercicio 7. *3 %.*
Se considera la **sucesión monótona de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left[2 - \frac{1}{n}, 4 + \frac{1}{n}\right].$$

I. Calcular la intersección $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k+1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

III. Verificar directamente la siguiente igualdad (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(A_1) = \mu(B) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *3 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = (3, +\infty) \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{\frac{3}{n} + (-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Se recomienda partir B en varios conjuntos cuyos supremos e ínfimos se calculan fácilmente.

Ejercicio 9. *1 %.*
Funciones acotadas. En el dominio $D = [-2, 3]$ consideremos la función $f(x) = -x^2 + 2x + 5$. Encontrar un $C > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant C$ para cada x en D.

Ejercicio 10. *2 %.*
Usando **la definición del límite de una función** demostrar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, donde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3x^2 - x + 2, \qquad a = -2, \qquad b = 16.$$