

## Análisis Funcional.

### Tarea “Espacios normados”.

#### Variante $\alpha$ .

*Bolas en espacios normados, desplazamientos y dilataciones en espacios normados, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, conjuntos convexos, cerraduras y subespacios, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas.*

#### Ejercicio 1. 3 %.

**Ejemplos de puntos pertenecientes a un rayo.** Sea  $X$  el espacio normado  $\mathbb{R}^2$  con la norma euclidiana. Sean  $\mathbf{a} = (-1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (3, 1)$ ,  $r = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ . Dibujar la bola  $B(\mathbf{a}, r)$ . Dibujar un trozo de la recta que pasa por los puntos  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . En esta recta marcar los puntos  $p(0.5)$ ,  $p(0.9)$ ,  $p(1.1)$  y  $p(1.5)$ , donde

$$p(t) := (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}.$$

#### Ejercicio 2. 10 %.

**En los espacios normados, la cerradura de la bola abierta es la bola cerrada con el mismo radio.** Sean  $V$  un espacio normado complejo,  $\mathbf{a} \in V$ ,  $r > 0$ . Demostrar que

$$\text{cl}(B(\mathbf{a}, r)) = \overline{B}(\mathbf{a}, r).$$

#### Ejercicio 3. 5 %.

**Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales.** Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sean  $A, B, C \subseteq V$ . Demostrar que

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

#### Ejercicio 4. 6 %.

**La adición en los espacios normados es continua.** Sea  $V$  un espacio normado. Recordar la definición de la topología del producto en  $V \times V$ . Demostrar que la operación adición  $V \times V \rightarrow V$  es continua.

**Ejercicio 5.** 10 %.

**Convergencia en espacios de sucesiones, ejemplo.** En el espacio  $\ell^1$  consideremos la sucesión  $x = (x^m)_{m \in \mathbb{N}}$ , definida mediante la siguiente regla:

$$x^m := \sum_{k=1}^m e_k = \left( \underbrace{1, \dots, 1}_m, 0, 0, \dots \right).$$

Determinar si esta sucesión tiene un límite en  $\ell^1$ . Justificar bien la respuesta.

**Ejercicio 6.** 5 %.

**Combinaciones convexas de combinaciones convexas son combinaciones convexas.** Sea  $V$  un espacio vectorial real o complejo y sean  $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q \in V$ ,  $u \in \text{conv}(a_1, \dots, a_p)$ ,  $v \in \text{conv}(b_1, \dots, b_q)$ ,  $w \in \text{conv}(u, v)$ . Demostrar que  $w \in \text{conv}(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$ .

**Ejercicio 7.** 5 %.

**Envolturas convexas.** Sea  $V$  un espacio vectorial real o complejo y sea  $A \subseteq V$ . Demostrar que  $\text{conv}_2(\text{conv}(A)) \subseteq \text{conv}(A)$ . Sugerencia: usar el resultado del ejercicio anterior.

**Ejercicio 8.** 5 %.

**Cada bola en un espacio normado es un conjunto convexo.** Sea  $V$  un espacio normado complejo y sean  $a \in V$ ,  $r > 0$ . Demostrar que la bola  $B(a, r)$  es un conjunto convexo.

**Ejercicio 9.** 7 %.

**La suma del conjunto cerrado con el conjunto compacto es un conjunto cerrado.** Sea  $V$  un espacio normado complejo y sean  $P, Q \subseteq V$  tales que  $P$  es cerrado y  $Q$  es compacto. Demostrar que  $P + Q$  es cerrado.

**Ejercicio 10.** 7 %.

**La cerradura del conjunto convexo es un conjunto convexo.** Sea  $V$  un espacio normado complejo y sea  $A \subseteq V$ . Supongamos que  $A$  es convexo. Demostrar que  $\text{cl}(A)$  es convexo.

**Ejercicio 11.** 5 %.

**Ejemplo de normas equivalentes.** Demostrar de manera explícita que las normas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_\infty$  en el espacio  $\mathbb{C}^n$  son equivalentes. En otras palabras, encontrar  $C_1 > 0$  y  $C_2 > 0$  tales que para cada  $x$  en  $\mathbb{C}^n$

$$\|x\|_1 \leq C_1 \|x\|_\infty, \quad \|x\|_\infty \leq C_2 \|x\|_1.$$

**Ejercicio 12.** 8 %.

**Ejemplo de normas no equivalentes.** Demostrar que las normas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_\infty$  en el espacio  $\ell^1$  son equivalentes. Sugerencia: para cada  $M > 0$  encontrar  $\mathbf{a}$  en  $\ell^1$  tal que

$$\|\mathbf{a}\|_1 > M\|\mathbf{a}\|_\infty.$$

**Ejercicio 13.** 8 %.

**La esfera unitaria en  $\ell^2$  no es totalmente acotada.** Construir de manera explícita una sucesión  $(\mathbf{a}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  en  $\ell^2$  tal que  $\|\mathbf{a}_m\|_2 = 1$  para cada  $m$  en  $\mathbb{N}$  y

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m \neq n \implies \|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n\|_2 \geq 1).$$

**Ejercicio 14.** 5 %.

**El espacio normado de las sucesiones acotadas.** Demostrar que  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  es un espacio normado. Este espacio consiste de todas las sucesiones acotadas, y la norma se define mediante la regla

$$\|\mathbf{a}\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |\mathbf{a}_k|.$$

**Ejercicio 15.** 7 %.

**Ejemplo de espacio normado completo.** Demostrar que el espacio  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  es completo. Este espacio consiste de todas las sucesiones acotadas, y la norma se define mediante la regla

$$\|\mathbf{a}\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |\mathbf{a}_k|.$$

**Ejercicio 16.** 8 %.

**Cada subespacio del espacio normado tiene interior vacío o coincide con el espacio total.** Sea  $V$  un espacio normado complejo y sea  $W$  un subespacio de  $V$ . Supongamos que  $\text{int}(W) \neq \emptyset$ . Demostrar que  $W = V$ .

**Ejercicio 17.** 6 %.

**Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente  $\mathbb{R}^2/W$ .** En el espacio  $V = \mathbb{R}^2$  con la norma euclidiana consideremos el subespacio  $W = \ell(\mathbf{a})$ , donde

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Sea  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$  en  $\mathbb{R}^2$ . Consideremos la función  $f_{\mathbf{x}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_{\mathbf{x}}(\lambda) := \|\mathbf{x} + \lambda\mathbf{a}\|^2$ . Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.

II. Sea  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$ . Calcular la norma del elemento  $\mathbf{x} + W$  del espacio cociente  $V/W$ .

**Ejercicio 18.** 7 %.

**Cada isomorfismo de espacios normados complejos de dimensión finita es un homeomorfismo.** Sea  $V$  un espacio normado de dimensión  $n$  y sea  $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$  un isomorfismo. Demostrar que  $T$  es un homeomorfismo. Sugerencia: usar el hecho que cualesquiera dos normas en  $\mathbb{C}^n$  son equivalentes.

## Análisis Funcional.

### Tarea “Espacios normados”.

#### Variante 0.

*Bolas en espacios normados, desplazamientos y dilataciones en espacios normados, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, conjuntos convexos, cerraduras y subespacios, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas.*

#### Ejercicio 1. 3 %.

**Ejemplos de puntos pertenecientes a un rayo.** Sea  $X$  el espacio normado  $\mathbb{R}^2$  con la norma euclidiana. Sean  $\mathbf{a} = (3, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2)$ ,  $r = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ . Dibujar la bola  $B(\mathbf{a}, r)$ . Dibujar un trozo de la recta que pasa por los puntos  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . En esta recta marcar los puntos  $p(0.5)$ ,  $p(0.8)$ ,  $p(1.2)$  y  $p(1.5)$ , donde

$$p(t) := (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}.$$

#### Ejercicio 2. 10 %.

**En los espacios normados, la frontera de la bola abierta es la esfera con el mismo radio.** Sean  $V$  un espacio normado complejo,  $\mathbf{a} \in V$ ,  $r > 0$ . Demostrar de manera directa que

$$\text{fr}(B(\mathbf{a}, r)) = S(\mathbf{a}, r).$$

Indicaciones. En la solución de este problema no está permitido usar el resultado sobre la cerradura de la bola abierta. Aceptar sin demostración y utilizar la siguiente descripción de la frontera:

$$x \in \text{fr}(A) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \left( \exists y \in A \cap B(x, \varepsilon) \quad \wedge \quad \exists z \in B(x, \varepsilon) \setminus A \right).$$

En una parte de la demostración se requiere **construir** los puntos  $y$ ,  $z$  de esta descripción.

#### Ejercicio 3. 5 %.

**Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales.** Sea  $V$  un espacio vectorial complejo. Sean  $A, B \subseteq V$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Demostrar que

$$\lambda(A + B) = (\lambda A) + (\lambda B).$$

#### Ejercicio 4. 6 %.

**Los conjuntos abiertos desplazados y dilatados en espacios normados.** Sea  $V$  un espacio normado complejo, sea  $A \subseteq V$  un subconjunto abierto de  $V$  y sean  $\mathbf{b} \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Demostrar que el conjunto  $C := \lambda A + \mathbf{b}$  es abierto. Indicación: escribir una demostración directa, trabajando con bolas.

**Ejercicio 5.** 10 %.

**Convergencia en espacios de sucesiones, ejemplo.** En el espacio  $\ell^1$  consideremos la sucesión  $x = (x^m)_{m \in \mathbb{N}}$ , definida mediante la siguiente regla:

$$x^m := \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} e_k = \left( 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots \right).$$

Determinar si esta sucesión tiene un límite en  $\ell^1$ . Justificar bien la respuesta.

**Ejercicio 6.** 5 %.

**Expresión recursiva para las combinaciones convexas.** Sea  $V$  un espacio vectorial real o complejo, sea  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ , sean  $a_1, \dots, a_m \in V$  y sea  $v \in \text{conv}(a_1, \dots, a_m)$ . Construir  $u$  en  $\text{conv}(a_1, \dots, a_{m-1})$  tal que  $v \in \text{conv}(u, a_m)$ .

**Ejercicio 7.** 5 %.

**Envolturas convexas.** Sea  $V$  un espacio vectorial real o complejo y sea  $A \subseteq V$ . Supongamos que  $\text{conv}_2(A) \subseteq A$ . Demostrar que  $\text{conv}_m(A) \subseteq A$  para cada  $m$  en  $\mathbb{N}$ . Sugerencia: usar el resultado del ejercicio anterior.

**Ejercicio 8.** 5 %.

**Cada semiespacio real es un conjunto convexo.** Sea  $V$  un espacio normado complejo, sea  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal continuo y sea  $c \in \mathbb{R}$ . Pongamos

$$A := \left\{ x \in V: \text{Re}(\varphi(x)) \leq c \right\}.$$

Demostrar que el conjunto  $A$  es convexo.

**Ejercicio 9.** 7 %.

**Las vecindades de los conjuntos en los espacios normados.** Sea  $V$  un espacio normado complejo y sea  $A \subseteq V$ .

I. Dado  $\varepsilon > 0$ , demostrar que

$$\{v \in V: d(v, A) < \varepsilon\} = A + \varepsilon B(0_V, 1).$$

II. Demostrar que

$$\text{cl}(A) = \bigcap_{\varepsilon > 0} (A + \varepsilon B(0_V, 1)).$$

**Ejercicio 10.** 7 %.

**El interior del conjunto convexo es un conjunto convexo.** Sea  $V$  un espacio normado complejo y sea  $A \subseteq V$ . Supongamos que  $A$  es convexo. Demostrar que  $\text{int}(A)$  es convexo. Si esta afirmación no es correcta, construir un contraejemplo.

**Ejercicio 11.** 5 %.

**Ejemplo de normas equivalentes.** En el espacio  $\mathbb{C}^2$  consideremos la norma

$$N(a) := \sup_{t \in [0,1]} |a_0 + a_1 t|.$$

Demostrar de manera explícita que las normas  $N$  y  $\|\cdot\|_\infty$  en  $\mathbb{C}^2$  son equivalentes. En otras palabras, encontrar  $C_1 > 0$  y  $C_2 > 0$  tales que para cada  $a$  en  $\mathbb{C}^2$

$$N(a) \leq C_1 \|a\|_\infty, \quad \|a\|_\infty \leq C_2 N(a).$$

**Ejercicio 12.** 8 %.

**Ejemplo de normas no equivalentes.** Denotemos por  $V$  el espacio vectorial de todas las funciones polinomiales con coeficientes complejos, definidas en el dominio  $[0, 1]$ . En el espacio  $V$  consideremos las normas

$$\|f\|_{\text{sup}} := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \quad (f \in V),$$
$$P(f) := \sum_{k=0}^m |c_k| \quad \left( f \in V, \quad f(t) = \sum_{k=0}^m c_k t^k \right).$$

Demostrar que las normas  $\|\cdot\|_{\text{sup}}$  y  $P$  no son equivalentes. Sugerencia: considerar las funciones

$$g_m(t) = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{k} t^k.$$

**Ejercicio 13.** 8 %.

**La esfera unitaria en el espacio de funciones de variación acotada no es separable.** Consideremos el espacio  $V = BV([0, 2])$  con la norma

$$\|f\|_{BV} := \|f\|_{\text{sup}} + \text{Var}_0^2(f).$$

Construir de manera explícita una familia  $(g_t)_{t \in [0,1]}$  en  $V$  tal que  $\|g_t\|_{BV} = 1$  para cada  $t$  en  $[0, 1]$  y

$$\forall t, u \in [0, 1] \quad (t \neq u \implies \|g_t - g_u\|_{BV} \geq 1).$$

Sugerencia: se pueden construir funciones constantes a trozos. Dibujar las gráficas de  $g_t$ ,  $g_u$  y  $g_t - g_u$  para  $t = 1/5$  y  $u = 2/5$ .

**Ejercicio 14.** 5 %.

**El espacio normado de las funciones continuas que tienden a cero en el infinito.** Sea  $X$  un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto. Denotamos por  $C_0(X)$  el conjunto de las funciones  $X \rightarrow \mathbb{C}$  que son continuas en  $X$  y “tienden a cero en el infinito”:

$$C_0(X) := \left\{ f \in C(X, \mathbb{C}) : \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \subseteq X \quad (K \text{ es compacto} \quad \wedge \quad \sup_{x \in X \setminus K} |f(x)| < \varepsilon) \right\}.$$

I. Verificar que  $C_0(X) \subseteq B(X)$ .

II. Verificar que  $C_0(X)$  es un subespacio vectorial de  $B(X)$ . Este espacio se considera con la norma-supremo  $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ .

**Ejercicio 15.** 7 %.

**Completez del espacio de las funciones continuas que tienden a cero en el infinito.** Demostrar que  $C_0(X)$  es un subespacio cerrado de  $C_b(X)$ .

**Ejercicio 16.** 8 %.

**Subespacios densos y no densos.**

I. Sea  $V$  un espacio normado complejo y sea  $W$  un subespacio vectorial de  $V$  tal que  $W \neq V$  y  $\dim(W) = n$ . Demostrar que  $W$  es cerrado (se puede usar algún resultado demostrado en el curso) y concluir que  $\text{cl}(W) \neq V$ .

II. Encontrar un espacio normado complejo  $V$  y un subespacio vectorial  $W$  de  $V$  tales que  $W \neq V$ , pero  $\text{cl}(W) = V$ .

**Ejercicio 17.** 6 %.

**Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente  $\mathbb{R}^2/W$ .** En el espacio  $V = \mathbb{R}^2$  con la norma euclidiana consideremos el subespacio  $W = \ell(\mathbf{a})$ , donde

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Sea  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$  en  $\mathbb{R}^2$ . Consideremos la función  $f_{\mathbf{x}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_{\mathbf{x}}(\lambda) := \|\mathbf{x} + \lambda\mathbf{a}\|^2$ . Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.

II. Sea  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$ . Calcular la norma del elemento  $\mathbf{x} + W$  del espacio cociente  $V/W$ .

**Ejercicio 18.** 7 %.

**Continuidad de la transformación lineal, cuyo dominio es  $\mathbb{C}^n$  y cuyo codominio es un espacio normado.** Sea  $W$  un espacio normado y sea  $T: \mathbb{C}^n \rightarrow W$  una transformación lineal. Demostrar que  $T$  es continua.



## Análisis Funcional.

### Tarea “Espacios normados”.

#### Variante 1.

*Bolas en espacios normados, desplazamientos y dilataciones en espacios normados, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, conjuntos convexos, cerraduras y subespacios, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas.*

#### Ejercicio 1. 3 %.

**Ejemplos de puntos pertenecientes a un segmento.** Sea  $X$  el espacio normado  $\mathbb{R}^2$  con la norma euclidiana. Sean  $\mathbf{a}_1 = (-3, -1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (4, -2)$ ,  $r_1 = 6$ ,  $r_2 = 2$ . Dibujar las bolas  $B(\mathbf{a}_1, r_1)$  y  $B(\mathbf{a}_2, r_2)$ . Dibujar el segmento que une los puntos  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$ . Marcar los puntos  $p(1/10)$ ,  $p(1/2)$ ,  $p(3/4)$  y  $p(9/10)$ , donde

$$p(t) := (1 - t)\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2.$$

#### Ejercicio 2. 10 %.

**En los espacios normados, si la distancia entre los centros de dos bolas es menor que la suma de los radios, entonces las bolas intersectan.** Sean  $V$  un espacio normado complejo,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in V$ ,  $r_1, r_2 > 0$  tales que

$$d(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) < r_1 + r_2.$$

Construir un punto en  $B(\mathbf{a}_1, r_1) \cap B(\mathbf{a}_2, r_2)$  como una combinación convexa de los puntos  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$ .

#### Ejercicio 3. 5 %.

**Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales.** Sea  $V$  un espacio vectorial complejo. Sean  $A \subseteq V$ ,  $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ . Demostrar que

$$(\xi + \eta)A \subseteq (\xi A) + (\eta A).$$

Suponiendo que  $V \neq \{0_V\}$  construir un ejemplo tal que  $2A \neq A + A$ .

#### Ejercicio 4. 6 %.

**La suma de dos series convergentes en espacios normados.** Sea  $V$  un espacio normado complejo y sean  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dos sucesiones con valores en  $V$  tales que convergen las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{b}_k.$$

Demostrar que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{a}_k + \mathbf{b}_k)$  también converge, y

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{a}_k + \mathbf{b}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{b}_k.$$

Indicación: introducir la notación para las sumas parciales de las dos series originales y para sus límites.

**Ejercicio 5.** 10 %.

**Convergencia en espacios de sucesiones, ejemplo.** En el espacio  $\ell^2$  consideremos la sucesión  $x = (x^m)_{m \in \mathbb{N}}$ , definida mediante la siguiente regla:

$$x^m := \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} e_k = \left( 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots \right).$$

Determinar si esta sucesión tiene un límite en  $\ell^2$ . Justificar bien la respuesta.

**Ejercicio 6.** 5 %.

**La envoltura convexa de una lista de vectores incluye a los vectores originales.** Sea  $V$  un espacio vectorial real o complejo, sean  $a_1, \dots, a_m \in V$  y sea  $p \in \{1, \dots, m\}$ . Demostrar que  $a_p \in \text{conv}(a_1, \dots, a_m)$ .

**Ejercicio 7.** 5 %.

**Envolturas convexas.** Sea  $V$  un espacio vectorial real o complejo y sea  $A \subseteq V$ . Demostrar que  $A = \text{conv}_1(A)$  y  $\text{conv}_1(A) \subseteq \text{conv}(A)$ .

**Ejercicio 8.** 5 %.

**La suma de dos conjuntos convexos es convexa.** Sea  $V$  un espacio normado complejo y sean  $P, Q \subseteq V$  conjuntos convexos. Demostrar que  $P + Q$  es convexo.

**Ejercicio 9.** 7 %.

**La suma del conjunto abierto con el conjunto arbitrario es un conjunto abierto.** Sea  $V$  un espacio normado y sean  $P, Q$  subconjuntos de  $V$ . Supongamos que  $P$  es abierto. Demostrar que  $P + Q$  es abierto.

**Ejercicio 10.** 7 %.

**La envoltura convexa del conjunto cerrado no necesariamente es cerrada.** Encontrar un espacio normado  $V$  y un conjunto  $A \subseteq V$  cerrado tales que su envoltura convexa  $\text{conv}(A)$  no sea cerrada.

**Ejercicio 11.** 5 %.

**Ejemplo de normas equivalentes.** Sean  $V_1, V_2$  espacios normados complejos. En el espacio vectorial  $V_1 \oplus V_2$  consideremos dos normas:

$$\|(x, y)\|_{V_1 \oplus V_2, 1} := \|x\|_{V_1} + \|y\|_{V_2}, \quad \|(x, y)\|_{V_1 \oplus V_2, 2} := \sqrt{\|x\|_{V_1}^2 + \|y\|_{V_2}^2}.$$

Demostrar de manera explícita que estas dos normas son equivalentes. En otras palabras, encontrar  $C_1 > 0$  y  $C_2 > 0$  tales que para cada  $(x, y)$  en  $V_1 \oplus V_2$

$$\|(x, y)\|_{V_1 \oplus V_2, 1} \leq C_1 \|(x, y)\|_{V_1 \oplus V_2, 2}, \quad \|(x, y)\|_{V_1 \oplus V_2, 2} \leq C_2 \|(x, y)\|_{V_1 \oplus V_2, 1}.$$

**Ejercicio 12.** 8 %.

**Ejemplo de normas no equivalentes.** Demostrar que las normas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$  en el espacio  $\ell^1$  no son equivalentes. Sugerencia: para cada  $M > 0$  encontrar  $\mathbf{a}$  en  $\ell^1$  tal que

$$\|\mathbf{a}\|_1 > M\|\mathbf{a}\|_2.$$

**Ejercicio 13.** 8 %.

**La esfera unitaria en el espacio de funciones absolutamente continuas no es totalmente acotada.** Consideramos el espacio  $V = AC([0, 1])$  con la norma

$$\|f\|_{AC} := \|f\|_{\text{sup}} + \int_0^1 |f'|.$$

Construir de manera explícita una sucesión  $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$  en  $V$  tal que  $\|g_m\|_{AC} = 1$  para cada  $g$  en  $\mathbb{N}$  y

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m \neq n \implies \|g_m - g_n\|_{AC} \geq 1).$$

Dibujar las gráficas de  $g_2$ ,  $g_5$  y  $g_2 - g_5$ .

**Ejercicio 14.** 5 %.

**El espacio normado de las funciones acotadas Lipschitz continuas.** Sea  $X$  un espacio métrico. Definimos  $\varphi: \mathbb{C}^X \rightarrow [0, +\infty]$ ,

$$\varphi(f) := \sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}.$$

Demostrar que  $\varphi$  es una seminorma extendida. Pongamos

$$\text{Lip}(X) := \left\{ f \in B(X) : \varphi(f) < +\infty \right\}.$$

Mostrar que  $\text{Lip}(X)$  es un subespacio vectorial de  $B(X)$ . Definimos  $\|\cdot\|_{\text{Lip}}: \text{Lip}(X) \rightarrow [0, +\infty)$ ,

$$\|f\|_{\text{Lip}} := \|f\|_{\text{sup}} + \varphi(f).$$

Demostrar que  $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$  es una norma.

**Ejercicio 15.** 7 %.

**Completez del espacio de las funciones acotadas Lipschitz continuas.** Sea  $X$  un espacio métrico. Demostrar que el espacio  $\text{Lip}(X)$  con la norma  $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$  es completo.

**Ejercicio 16.** 8 %.

**Cada subespacio del espacio normado tiene interior vacío o coincide con el espacio total.** Sea  $V$  un espacio normado complejo y sea  $W$  un subespacio de  $V$ . Supongamos que  $\text{int}(W) \neq \emptyset$ . Demostrar que  $W = V$ .

**Ejercicio 17.** 6 %.

**Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente  $\mathbb{R}^2/W$ .** En el espacio  $V = \mathbb{R}^2$  con la norma euclidiana consideremos el subespacio  $W = \ell(\mathbf{a})$ , donde

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Sea  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$  en  $\mathbb{R}^2$ . Consideremos la función  $f_{\mathbf{x}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_{\mathbf{x}}(\lambda) := \|\mathbf{x} + \lambda\mathbf{a}\|^2$ . Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.

II. Sea  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$ . Calcular la norma del elemento  $\mathbf{x} + W$  del espacio cociente  $V/W$ .

**Ejercicio 18.** 7 %.

**Cada espacio normado de dimensión finita es completo.** Sea  $V$  un espacio normado de dimensión finita. Demostrar que  $V$  es de Banach. Sugerencia: se pueden usar la completez del espacio métrico  $\mathbb{C}^n$  y el hecho que cualesquiera dos normas en  $\mathbb{C}^n$  son equivalentes.

## Análisis Funcional.

### Tarea “Espacios normados”.

#### Variante 2.

*Bolas en espacios normados, desplazamientos y dilataciones en espacios normados, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, conjuntos convexos, cerraduras y subespacios, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas.*

#### Ejercicio 1. 3 %.

**Ejemplos de puntos pertenecientes a un rayo.** Sea  $X$  el espacio normado  $\mathbb{R}^2$  con la norma euclidiana. Sean  $\mathbf{a}_1 = (-2, 1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (3, -2)$ ,  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 6$ . Dibujar las bolas  $B(\mathbf{a}_1, r_1)$  y  $B(\mathbf{a}_2, r_2)$ . Dibujar un trozo del rayo que inicia en  $\mathbf{a}_2$  y pasa por  $\mathbf{a}_1$ . En este rayo marcar los puntos  $p(0.5)$ ,  $p(0.9)$ ,  $p(1.1)$  y  $p(1.3)$ , donde

$$p(t) := (1 - t)\mathbf{a}_2 + t\mathbf{a}_1.$$

#### Ejercicio 2. 10 %.

**En los espacios normados, el diámetro de la bola es su radio doble.** Sean  $V$  un espacio normado complejo,  $V \neq \{0_V\}$ ,  $\mathbf{a} \in V$ ,  $r > 0$ . Demostrar que

$$\text{diam}(B(\mathbf{a}, r)) = 2r.$$

Sugerencia. Para cada  $\varepsilon$  con  $0 < \varepsilon < r$  se recomienda **construir**  $p, q$  en  $B(\mathbf{a}, r)$  tales que  $\|p - q\| = 2r - \varepsilon$ .

#### Ejercicio 3. 5 %.

**Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales.** Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sea  $A \subseteq V$ . Supongamos que  $A$  es convexo. Demostrar que el conjunto  $A - A$  también es convexo.

#### Ejercicio 4. 6 %.

**Los conjuntos cerrados desplazados y dilatados en espacios normados.** Sea  $V$  un espacio normado complejo, sea  $A \subseteq V$  un subconjunto cerrado de  $V$  y sean  $\mathbf{b} \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Demostrar que el conjunto  $C := \lambda A + \mathbf{b}$  es cerrado. Indicación: hacer una demostración directa, trabajando con puntos de adherencia por medio de bolas.

**Ejercicio 5.** 10 %.

**Convergencia en espacios de sucesiones, ejemplo.** En el espacio  $\ell^\infty$  consideremos la sucesión  $x = (x^m)_{m \in \mathbb{N}}$ , definida mediante la siguiente regla:

$$x^m := \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} e_k = \left( 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots \right).$$

Determinar si esta sucesión tiene un límite en  $\ell^\infty$ . Justificar bien la respuesta.

**Ejercicio 6.** 5 %.

**La intersección de las medianas de un triángulo en términos de combinaciones convexas.**

Sea  $V$  un espacio vectorial real y sean  $a_1, a_2, a_3 \in V$ . Denotemos por  $L_1$  el lado del triángulo opuesto al vértice  $a_1$ , esto es,  $L_1 := \text{conv}(a_2, a_3)$ . Sea  $b_1$  el centro del segmento  $L_1$ , esto es, el punto medio entre  $a_2$  y  $a_3$ . Sea  $M_1$  la mediana que conecta los puntos  $a_1$  y  $b_1$ , esto es,  $M_1 := \text{conv}(a_1, b_1)$ . De manera similar definimos  $L_2, b_2, M_2, L_3, b_3, M_3$ . Demostrar de manera algebraica que

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \{c\}, \quad \text{donde} \quad c := \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3).$$

**Ejercicio 7.** 5 %.

**Envolturas convexas.** Sea  $V$  un espacio vectorial real o complejo y sea  $A \subseteq V$ . Demostrar que  $\text{conv}_m(A) \subseteq \text{conv}_{m+1}(A)$  para cada  $m$  en  $\mathbb{N}$ .

**Ejercicio 8.** 5 %.

**El epigrafo de cada función convexa es un conjunto convexo.** Sea  $V$  un espacio vectorial real o complejo y sea  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Denotemos por  $E$  el epigrafo de  $f$ :

$$E := \{(x, \alpha) \in V \times \mathbb{R}: \alpha \geq f(x)\}.$$

Demostrar que  $E$  es un subconjunto convexo del espacio vectorial  $V \times \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 9.** 7 %.

**La suma de dos conjuntos cerrados en un espacio normado puede no ser cerrada.** En el espacio  $\mathbb{C}$  encontrar dos subconjuntos cerrados  $X, Y$  tales que el conjunto  $X + Y$  no sea cerrado.

**Ejercicio 10.** 7 %.

**La envoltura convexa del conjunto abierto es abierta.** Sea  $V$  un espacio normado complejo y sea  $A \subseteq V$  tal que  $A$  es abierto. Demostrar que el conjunto  $\text{conv}(A)$  es abierto.

**Ejercicio 11.** 5 %.

**Ejemplo de normas equivalentes.** Sea  $\rho \in C([0, 1], [0, +\infty))$ . Consideramos el espacio vectorial  $V := C([0, 1], \mathbb{C})$ . Denotamos por  $N$  la siguiente norma en  $V$ :

$$N(f) := \sup_{x \in [0, 1]} |\rho(x)f(x)|.$$

Supongamos que  $c := \inf_{x \in X} \rho(x) > 0$ . Demostrar de manera explícita que las normas  $N$  y  $\|\cdot\|_{\text{sup}}$  son equivalentes. En otras palabras, encontrar  $C_1 > 0$  y  $C_2 > 0$  tales que para cada  $f$  en  $V$

$$N(f) \leq C_1 \|f\|_{\text{sup}}, \quad \|f\|_{\text{sup}} \leq C_2 N(f).$$

**Ejercicio 12.** 8 %.

**Ejemplo de normas no equivalentes.** Consideramos el espacio vectorial  $V := C([0, 1], \mathbb{C})$ . Definimos  $P: V \rightarrow [0, +\infty)$ ,

$$P(f) := \sup_{x \in [0, 1]} |x f(x)|.$$

I. Demostrar que si  $f \in V$  y  $P(f) = 0$ , entonces  $f = 0_{[0, 1]}$ . Es obvio que  $P$  es subaditiva y absolutamente homogénea, por eso podremos concluir que  $P$  es una norma. (las demás .

II. Demostrar que las normas  $P$  y  $\|\cdot\|_{\text{sup}}$  no son equivalentes. Sugerencia: para cada  $M > 0$  encontrar  $f$  en  $V$  tal que

$$\|f\|_{\text{sup}} > M P(f).$$

**Ejercicio 13.** 8 %.

**La esfera unitaria en el espacio de funciones continuas no es totalmente acotada.** Consideramos el espacio  $V = C([0, 1])$  con la norma-supremo. Construir de manera explícita una sucesión  $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$  en  $V$  tal que  $\|g_m\|_{\text{sup}} = 1$  para cada  $g$  en  $\mathbb{N}$  y

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m \neq n \implies \|g_m - g_n\|_{\text{sup}} \geq 1).$$

Dibujar las gráficas de  $g_2$ ,  $g_5$  y  $g_2 - g_5$ .

**Ejercicio 14.** 5 %.

**El espacio normado de las funciones de variación acotada.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Denotamos por  $\mathcal{P}(a, b)$  al conjunto de las “particiones” del segmento  $[a, b]$ , en el mismo sentido que se usa en la construcción de la integral de Riemann:

$$\mathcal{P}(a, b) := \left\{ \tau = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m) : m \in \mathbb{N}, a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m = b \right\}.$$

Para cada  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y cada  $\tau = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m)$  en  $\mathcal{P}(a, b)$  pongamos

$$S_{\text{abs}}(f, \tau) := \sum_{k=1}^m |f(\tau_k) - f(\tau_{k-1})|.$$

Para cada  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  pongamos  $\text{Var}_a^b(f) := \sup_{\tau \in \mathcal{P}(a, b)} S_{\text{abs}}(f, \tau)$ . Demostrar que  $\text{Var}_a^b$  es una seminorma extendida. Mostrar que si  $\text{Var}_a^b(f) < +\infty$ , entonces  $f$  es acotada. Mostrar que el conjunto

$$BV(a, b) := \{f \in C^{[a, b]} : \text{Var}_a^b(f) < +\infty\}$$

es un subespacio vectorial de  $B([a, b])$ . Definimos  $\|\cdot\|_{BV}: BV([a, b]) \rightarrow [0, +\infty)$ ,

$$\|f\|_{BV} := \text{Var}_a^b(f) + \|f\|_{\text{sup}}.$$

Demostrar que  $\|\cdot\|_{BV}$  es una norma.

**Ejercicio 15.** 7 %.

**Completez del espacio de las funciones de variación acotada.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Demostrar que el espacio  $BV([a, b])$  con la norma  $\|\cdot\|_{BV}$  es completo.

**Ejercicio 16.** 8 %.

**La suma de dos subespacios cerrados no siempre es cerrada.** En el espacio  $\ell^2$  consideremos los siguientes dos subespacios:

$$S_1 = \left\{ x \in \ell^2(\mathbb{N}) : \forall j \in \mathbb{N} \quad x_{2j} = 0 \right\}, \quad S_2 = \left\{ x \in \ell^2(\mathbb{N}) : \forall j \in \mathbb{N} \quad x_{2j} = \frac{x_{2j-1}}{j} \right\}.$$

I. Representar  $S_1$  y  $S_2$  como intersecciones de los núcleos de ciertos funcionales lineales acotados definidos en  $\ell^2$ .

II. Demostrar que  $S_1$  y  $S_2$  son cerrados.

III. Demostrar que  $e_{2m-1} \in S_1$  y  $e_{2m-1} + \frac{e_{2m}}{m} \in S_2$  para cada  $m$  en  $\mathbb{N}$ .

IV. Demostrar que  $e_{2m-1} \in S_1 + S_2$  y  $e_{2m} \in S_1 + S_2$  para cada  $m$  en  $\mathbb{N}$ .

V. Demostrar que  $\text{cl}(S_1 + S_2) = \ell^2$ .

VI. Demostrar que la sucesión  $u = (0, 1, 0, 1/2, 0, 1/3, \dots)$  no pertenece al subespacio  $S_1 + S_2$ .

**Ejercicio 17.** 6 %.

**Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente  $\mathbb{R}^2/W$ .** En el espacio  $V = \mathbb{R}^2$  con la norma euclidiana consideremos el subespacio  $W = \ell(\mathbf{a})$ , donde

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Sea  $x = [x_1, x_2]^\top$  en  $\mathbb{R}^2$ . Consideremos la función  $f_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_x(\lambda) := \|x + \lambda\mathbf{a}\|^2$ . Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.

II. Sea  $x = [x_1, x_2]^\top$ . Calcular la norma del elemento  $x + W$  del espacio cociente  $V/W$ .

**Ejercicio 18.** 7 %.

**Las distancias al origen en el espacio  $\mathbb{C}^n$  se alcanzan.** Sea  $A$  un subconjunto cerrado de  $\mathbb{C}^n$ . Demostrar que existe  $u$  en  $A$  tal que  $\|u\| = d(0_V, A)$ , es decir,

$$\|u\| = \inf_{a \in A} \|a\|.$$

Sugerencia: usar el hecho que los conjuntos acotados cerrados en  $\mathbb{C}^n$  son compactos.



## Análisis Funcional.

### Tarea “Espacios normados”.

#### Variante 3.

*Bolas en espacios normados, desplazamientos y dilataciones en espacios normados, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, conjuntos convexos, cerraduras y subespacios, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas.*

#### Ejercicio 1. 3 %.

**Ejemplos de puntos pertenecientes a un rayo.** Sea  $X$  el espacio normado  $\mathbb{R}^2$  con la norma euclidiana. Sean  $\mathbf{a} = (-1, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (2, -3)$ ,  $r = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ . Dibujar la bola  $B(\mathbf{a}, r)$ . Dibujar un trozo del rayo que inicia en  $\mathbf{a}$  y pasa por  $\mathbf{b}$ . En este rayo marcar los puntos  $p(0.5)$ ,  $p(0.8)$ ,  $p(1.2)$  y  $p(1.5)$ , donde

$$p(t) := (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}.$$

#### Ejercicio 2. 10 %.

**En los espacios normados, el interior de la bola cerrada es la bola abierta del mismo radio.** Sean  $V$  un espacio normado complejo,  $\mathbf{a} \in V$ ,  $r_1 > 0$ . Demostrar que

$$\text{int}(\overline{B}(\mathbf{a}, r)) = B(\mathbf{a}, r).$$

Sugerencia: en una parte de demostración se recomienda considerar los puntos de un rayo que inicia en  $\mathbf{a}$ .

#### Ejercicio 3. 5 %.

**Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales.** Sea  $V$  un espacio vectorial complejo. Sean  $A \subseteq V$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{b} \in V$ . Supongamos que  $A$  es convexo. Demostrar que el conjunto  $C := \lambda A + \mathbf{b}$  también es convexo.

#### Ejercicio 4. 6 %.

**La continuidad de la multiplicación por escalares en el lenguaje de sucesiones.** Sea  $V$  un espacio normado complejo, sean  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $V$ ,  $\xi = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbf{b} \in V$ ,  $\eta \in \mathbb{C}$ . Supongamos que  $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$  y  $\xi \rightarrow \eta$ , esto es,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \mathbf{b}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \eta.$$

Demostrar de manera directa que  $\xi \mathbf{a} \rightarrow \eta \mathbf{b}$ , esto es,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\xi_k \mathbf{a}_k) = \eta \mathbf{b}.$$

Sugerencia: trabajar con propiedades de la norma o hacer operaciones lineales con bolas.

**Ejercicio 5.** 10 %.

**Convergencia en espacios de sucesiones, ejemplo.** En el espacio  $\ell^1$  consideremos la sucesión  $x = (x^m)_{m \in \mathbb{N}}$ , definida mediante la siguiente regla:

$$x^m := \sum_{k=1}^m e_k = \left( \underbrace{1, \dots, 1}_m, 0, 0, \dots \right).$$

Determinar si esta sucesión tiene un límite en  $\ell^1$ . Justificar bien la respuesta.

**Ejercicio 6.** 5 %.

**Las combinaciones convexas de combinaciones convexas son combinaciones convexas, ejemplo.** Sea  $V$  un espacio vectorial real o complejo y sean  $a_1, \dots, a_7 \in V$ . Supongamos que  $s \in \text{conv}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ ,  $t \in \text{conv}(a_5, a_6, a_7)$  y  $r \in \text{conv}(s, t)$ . Mostrar que  $r \in \text{conv}(a_1, \dots, a_7)$ .

**Ejercicio 7.** 5 %.

**Envolturas convexas.** Sea  $V$  un espacio vectorial real o complejo y sea  $A \subseteq V$ . Sean  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \text{conv}_p(A)$ ,  $v \in \text{conv}_q(A)$ ,  $w \in \text{conv}(u, v)$ . Demostrar que  $w \in \text{conv}_{p+q}(A)$ .

**Ejercicio 8.** 5 %.

**El cubo de Hilbert es convexo.** En el espacio  $\ell^2$  consideremos el conjunto

$$A := \left\{ a \in \ell^2 : \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_k \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Este conjunto se conoce como el “cubo de Hilbert” o el “ladrillo de Hilbert”. Demostrar que  $A$  es convexo.

**Ejercicio 9.** 7 %.

**La suma del conjunto cerrado con el conjunto compacto es un conjunto cerrado.** Sea  $V$  un espacio normado complejo y sean  $P, Q \subseteq V$  tales que  $P$  es cerrado y  $Q$  es compacto. Demostrar que  $P + Q$  es cerrado.

**Ejercicio 10.** 7 %.

**La envoltura convexa del conjunto acotado es un conjunto acotado.** Sea  $V$  un espacio normado complejo y sea  $A$  un subconjunto acotado de  $V$ . Demostrar que  $\text{conv}(A)$  también es acotado.

**Ejercicio 11.** 5 %.

**Ejemplo de normas equivalentes.** En el espacio  $\text{Lip}([0, 1])$  consideremos dos normas:

$$N_1(f) := \|f\|_{\text{sup}} + Q(f), \quad N_2(f) := |f(0)| + Q(f),$$

donde

$$Q(f) := \sup_{\substack{x, y \in [0, 1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Demostrar de manera explícita que las normas  $N_1$  y  $N_2$  son equivalentes. En otras palabras, encontrar  $C_1 > 0$  y  $C_2 > 0$  tales que para cada  $f$  en  $\text{Lip}([0, 1])$

$$N_1(f) \leq C_1 N_2(f), \quad N_2(f) \leq C_2 N_1(f).$$

**Ejercicio 12.** 8 %.

**Ejemplo de normas no equivalentes.** En el espacio  $\text{Lip}([0, 1])$  consideremos la norma  $\|\cdot\|_{\text{sup}}$  y la norma

$$N_1(f) := \|f\|_{\text{sup}} + Q(f),$$

donde

$$Q(f) := \sup_{\substack{x, y \in [0, 1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Demostrar que las normas  $\|\cdot\|_{\text{sup}}$  y  $N_1$  no son equivalentes. Sugerencia: para cada  $M > 0$  encontrar  $f$  en  $\text{Lip}([0, 1])$  tal que

$$N_1(f) > M \|f\|_{\text{sup}}.$$

**Ejercicio 13.** 8 %.

**La esfera unitaria en el espacio  $L^2([0, 1])$  no es totalmente acotada.** Consideramos el espacio  $V = L^2([0, 1])$ , donde  $[0, 1]$  está provisto de la medida de Lebesgue. Construir de manera explícita una sucesión  $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$  en  $V$  tal que  $\|g_m\|_2 = 1$  para cada  $g$  en  $\mathbb{N}$  y

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m \neq n \implies \|g_m - g_n\|_2 \geq 1).$$

Dibujar las gráficas de  $g_2$ ,  $g_5$  y  $g_2 - g_5$ .

**Ejercicio 14.** 5 %.

**El espacio normado de las funciones absolutamente continuas.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Denotamos por  $AC([a, b])$  al conjunto de las funciones complejas absolutamente continuas definidas en  $[a, b]$ . Se sabe que

$$f \in AC([a, b]) \iff \exists g \in L^1([a, b]) \quad \forall x \in [a, b] \quad f(x) = f(a) + \int_{[a, b]} g.$$

I. Demostrar que si  $f$  y  $g$  son como funciones en esta condición y  $f$  es una constante, entonces  $\|g\|_1 = 0$ .

II. Demostrar que  $AC([a, b]) \subseteq B([a, b])$ .

III. Demostrar que  $AC([a, b])$  es un subespacio vectorial de  $B([a, b])$ .

IV. Para cada  $f$  en  $AC([a, b])$  encontramos  $g$  como arriba y pongamos

$$\varphi(f) := \|g\|_1.$$

Mostrar que  $\varphi$  es una seminorma.

V. Definimos  $\|\cdot\|_{AC}: AC([a, b]) \rightarrow [0, +\infty)$ ,

$$\|f\|_{AC} := \varphi(f) + \|f\|_{\text{sup}}.$$

Mostrar que  $\|\cdot\|_{AC}$  es una norma.

**Ejercicio 15.** 7 %.

**Completez del espacio de las funciones absolutamente continuas.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Demostrar que el espacio  $AC([a, b])$  con la norma  $\|\cdot\|_{AC}$  es completo. Sugerencia: usar la completez del espacio  $L^1([a, b])$ .

**Ejercicio 16.** 8 %.

**Ejemplos de subespacios.** En el espacio  $\ell^1(\mathbb{N})$  construir dos subespacios cerrados  $W_1$  y  $W_2$  tales que  $\ell^1(\mathbb{N}) = W_1 + W_2$  y que ninguno de estos subespacios sea de dimensión finita. Justificar bien todas las propiedades mencionadas.

**Ejercicio 17.** 6 %.

**Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente  $\mathbb{R}^2/W$ .** En el espacio  $V = \mathbb{R}^2$  con la norma euclidiana consideremos el subespacio  $W = \ell(\mathbf{a})$ , donde

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Sea  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$  en  $\mathbb{R}^2$ . Consideremos la función  $f_{\mathbf{x}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_{\mathbf{x}}(\lambda) := \|\mathbf{x} + \lambda\mathbf{a}\|^2$ . Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.

II. Sea  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$ . Calcular la norma del elemento  $\mathbf{x} + W$  del espacio cociente  $V/W$ .

**Ejercicio 18.** 7 %.

**Los cubos de dimensión finita son totalmente acotados.** En el espacio  $\mathbb{R}^n$  con la métrica euclidiana consideremos el cubo  $A = [0, 1]^n$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Construir en  $A$  una  $\varepsilon$ -red finita.

## Análisis Funcional.

### Tarea “Espacios normados”.

#### Variante 4.

*Bolas en espacios normados, desplazamientos y dilataciones en espacios normados, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, conjuntos convexos, cerraduras y subespacios, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas.*

#### Ejercicio 1. 3 %.

**Ejemplos de puntos pertenecientes a un segmento.** Sea  $X$  el espacio normado  $\mathbb{R}^2$  con la norma euclidiana. Sean  $\mathbf{a}_1 = (-2, 1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (4, -2)$ ,  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 6$ . Dibujar las bolas  $B(\mathbf{a}_1, r_1)$  y  $B(\mathbf{a}_2, r_2)$ . Dibujar el segmento que une los puntos  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$ . Marcar los puntos  $p(1/10)$ ,  $p(1/4)$ ,  $p(1/2)$ ,  $p(3/4)$  y  $p(9/10)$ , donde

$$p(t) := (1 - t)\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2.$$

#### Ejercicio 2. 10 %.

**En los espacios normados, la cerradura de la bola abierta es la bola cerrada del mismo radio.** Sean  $V$  un espacio normado complejo,  $\mathbf{a} \in V$ ,  $r_1 > 0$ . Demostrar que

$$\text{cl}(B(\mathbf{a}, r)) = \overline{B}(\mathbf{a}, r).$$

Sugerencia: en una parte de demostración se recomienda considerar los puntos de un rayo que inicia en  $\mathbf{a}$ .

#### Ejercicio 3. 5 %.

**Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales.** Sea  $V$  un espacio vectorial complejo y sean  $P, Q \subseteq V$  subconjuntos convexos de  $V$ . Demostrar que el conjunto  $P + Q$  también es convexo.

#### Ejercicio 4. 6 %.

**Las traslaciones y dilataciones no nulas son homeomorfismos.** Sea  $V$  un espacio normado complejo. Para cada  $\mathbf{b}$  en  $V$  y cada  $\lambda$  en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , definimos  $T_{\mathbf{b}, \lambda}: V \rightarrow V$  mediante la regla  $T(\mathbf{x}) := \lambda\mathbf{x} + \mathbf{b}$ .

I. Sean  $\mathbf{b} \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Demostrar de manera directa que  $T_{\mathbf{b}, \lambda}$  es continua en cada punto. Indicación: trabajar con bolas.

II. Sean  $\mathbf{b} \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Encontrar la función  $U$  inversa a la función  $T_{\mathbf{b}, \lambda}$ . Hay que dar una fórmula para  $U$  y verificar que  $U \circ T_{\mathbf{b}, \lambda} = I_V$ ,  $T_{\mathbf{b}, \lambda} \circ U = I_V$ .

III. Sean  $\mathbf{b} \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Demostrar que  $T_{\mathbf{b}, \lambda}$  es un homeomorfismo.

**Ejercicio 5.** 10 %.

**Convergencia en espacios de sucesiones, ejemplo.** En el espacio  $c_0$  consideremos la sucesión  $x = (x^m)_{m \in \mathbb{N}}$ , definida mediante la siguiente regla:

$$x^m := \sum_{k=1}^m e_k = \left( \underbrace{1, \dots, 1}_m, 0, 0, \dots \right).$$

Determinar si esta sucesión tiene un límite en  $c_0$ . Justificar bien la respuesta.

**Ejercicio 6.** 5 %.

**Las combinaciones convexas de cuatro vectores en términos de combinaciones convexas de tres vectores.** Sea  $V$  un espacio vectorial real o complejo y sean  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in V$ . Supongamos que  $v \in \text{conv}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ . Construir  $u$  en  $\text{conv}(a_1, a_2, a_3)$  tal que  $v \in \text{conv}(u, a_4)$ .

**Ejercicio 7.** 5 %.

**Envolturas convexas.** Sea  $V$  un espacio vectorial real o complejo y sea  $A \subseteq V$ . Supongamos que  $\text{conv}_2(A) \subseteq A$ . Demostrar que  $\text{conv}_m(A) \subseteq A$  para cada  $m$  en  $\mathbb{N}$ . Sugerencia: usar la idea del ejercicio anterior.

**Ejercicio 8.** 5 %.

**El cubo de Hilbert es convexo.** En el espacio  $\ell^2$  consideremos el conjunto

$$A := \left\{ a \in \ell^2 : \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_k \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Demostrar que  $A$  es un conjunto convexo.

**Ejercicio 9.** 7 %.

**La cerradura de la suma de dos conjuntos en un espacio normado.** Sea  $V$  un espacio normado complejo y sean  $P, Q \subseteq V$ . Demostrar que  $\text{cl}(P + Q) \subseteq \text{cl}(P) + \text{cl}(Q)$ . Encontrar un ejemplo tal que  $\text{cl}(P + Q) \neq \text{cl}(P) + \text{cl}(Q)$ .

**Ejercicio 10.** 7 %.

**La envoltura convexa del conjunto compacto es compacta.** Sea  $V$  un espacio de Banach complejo y sea  $A$  un subconjunto compacto de  $V$ . Demostrar que  $\text{conv}(A)$  también es compacto.

**Ejercicio 11.** 5 %.

**Ejemplo de normas equivalentes.** En el espacio  $BV([0, 1])$  consideremos dos normas:

$$N_1(f) := \|f\|_{\text{sup}} + \text{Var}_0^1(f), \quad N_2(f) := |f(0)| + \text{Var}_0^1(f).$$

Demostrar de manera explícita que las normas  $N_1$  y  $N_2$  son equivalentes. En otras palabras, encontrar  $C_1 > 0$  y  $C_2 > 0$  tales que para cada  $f$  en  $BV([0, 1])$

$$N_1(f) \leq C_1 N_2(f), \quad N_2(f) \leq C_2 N_1(f).$$

**Ejercicio 12.** 8 %.

**Ejemplo de normas no equivalentes.** En el espacio  $BV([0, 1])$  consideremos la norma  $\|\cdot\|_{\text{sup}}$  y la norma

$$N_1(f) := \|f\|_{\text{sup}} + \text{Var}_0^1(f).$$

Demostrar que las normas  $\|\cdot\|_{\text{sup}}$  y  $N_1$  no son equivalentes. Sugerencia: para cada  $M > 0$  encontrar  $f$  en  $BV([0, 1])$  tal que

$$N_1(f) > M \|f\|_{\text{sup}}.$$

**Ejercicio 13.** 8 %.

**La esfera unitaria en el espacio  $C^1([0, 1])$  no es totalmente acotada.** Consideramos el espacio  $V = C^1([0, 1])$  con la norma

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_{\text{sup}} + \|f'\|_{\text{sup}}.$$

Construir de manera explícita una sucesión  $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$  en  $V$  tal que  $\|g_m\|_{C^1} = 1$  para cada  $g \in \mathbb{N}$  y

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m \neq n \implies \|g_m - g_n\|_{C^1} \geq 1).$$

Dibujar las gráficas de  $g_2$ ,  $g_5$  y  $g_2 - g_5$ .

**Ejercicio 14.** 5 %.

**El espacio normado de las funciones acotadas uniformemente continuas.** Sea  $X$  un espacio métrico. Denotamos por  $C_{\text{bu}}(X)$  el conjunto de las funciones  $X \rightarrow \mathbb{C}$  que son acotadas y uniformemente continuas.

- I. Demostrar que si  $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$  son uniformemente continuas, entonces  $f + g$  es uniformemente continua.
- II. Demostrar que si  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  es uniformemente continua y  $\lambda \in \mathbb{C}$ , entonces  $\lambda f$  es uniformemente continua.
- III. Demostrar que  $C_{\text{bu}}(X)$  es un subespacio vectorial de  $B(X)$ . Este espacio se considera con la norma-supremo  $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ .

**Ejercicio 15.** 7 %.

**Completez del espacio de las funciones acotadas uniformemente continuas.** Sea  $X$  un espacio métrico. Demostrar que  $C_{\text{bu}}(X)$  es un subespacio cerrado del espacio  $B(X)$ .

**Ejercicio 16.** 8 %.

**La cerradura de un subespacio es un subespacio.** Sea  $V$  un espacio normado complejo y sea  $W$  un subespacio vectorial de  $V$ . Demostrar que  $\text{cl}(W)$  también es un subespacio vectorial de  $V$ . Indicación: trabajar con puntos de adherencia y bolas.

**Ejercicio 17.** 6 %.

**Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente  $\mathbb{R}^2/W$ .** En el espacio  $V = \mathbb{R}^2$  con la norma euclidiana consideremos el subespacio  $W = \ell(\mathbf{a})$ , donde

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Sea  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$  en  $\mathbb{R}^2$ . Consideremos la función  $f_{\mathbf{x}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_{\mathbf{x}}(\lambda) := \|\mathbf{x} + \lambda\mathbf{a}\|^2$ . Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.

II. Sea  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$ . Calcular la norma del elemento  $\mathbf{x} + W$  del espacio cociente  $V/W$ .

**Ejercicio 18.** 7 %.

**Cada isomorfismo  $\mathbb{C}^n \rightarrow V$  es un homeomorfismo.** Sea  $V$  un espacio normado complejo de dimensión  $n$  y sea  $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$  un isomorfismo. Demostrar que  $T$  es un homeomorfismo, sin usar el teorema de Banach de la transformación lineal abierta.