Análisis Matemático IV. Tarea “Espacios métricos”.
Variante α.

Ejemplos de espacios métricos, bolas en espacios métricos, la topología del espacio métrico, la distancia entre puntos y conjuntos en espacios métricos, conjuntos acotados en espacios métricos, funciones acotadas, sucesiones de Cauchy, funciones uniformemente continuas, funciones contractivas, espacios métricos totalmente acotados.

Ejercicio 1. *5 %.*
La biyección canónica entre el eje real extendido y una semicircunferencia. Denotemos por Y la semicircunferencia inferior con centro $(0,1)$ de radio 1 en $\mathbb{R}^2$:

$$Y := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad x^2 + (y-1)^2 = 1, \quad y \leqslant 1\Big\}.$$

Definimos $f\colon [-\infty,\infty] \to Y$ mediante las siguientes reglas.

- Si $t \in \mathbb{R}$, entonces $f(t)$ es el punto de intersección de Y con el segmento que une los puntos $(t,0)$ y $(0,1)$.
- Si $t = -\infty$, entonces $f(t) = (-1,1)$.
- Si $t = +\infty$, entonces $f(t) = (1,1)$.

Calcular $f(t)$ de manera explícita para t en $\mathbb{R}$ y demostrar que f es continua.

Ejercicio 2. *5 %.*
La cerradura de la bola abierta está contenida en la bola cerrada. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $a \in X$, $r > 0$. Demostrar que

$$\mathrm{cl}(B(a,r)) \subseteq C(a,r),$$

donde $C(a,r) := \big\{x \in X\colon\ d(x,a) \leqslant r\big\}$.

Ejercicio 3. *6 %.*
La cerradura de una bola abierta puede ser un subconjunto propio de la bola cerrada. Consideramos el espacio $X = \mathbb{Z}$ con la distancia canónica $d(x,y) := |x-y|$. Encontrar a en X y $r > 0$ tales que

$$\mathrm{cl}(B(a,r)) \subsetneq \big\{x \in X\colon\ d(x,a) \leqslant r\big\}.$$

Ejercicio 4. *5 %.*
Las bolas abiertas son abiertas. Sea (X,d) un espacio métrico. Denotemos por τ_d la topología inducida por d. Sean $a \in X$, $r > 0$. Demostrar que $B(a,r) \in \tau_d$.

Ejercicio 5. *5 %.*
La distancia entre el punto variable y el conjunto fijo es una función Lipschitz continua con coeficiente 1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Definimos $D_A \colon X \to [0, +\infty)$,

$$D_A(x) \coloneqq \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Demostrar que $|D_A(x) - D_A(y)| \leqslant d(x, y)$ para cada x, y en X.

Ejercicio 6. *5 %.*
Consideramos $\mathbb{Z}$ con la distancia canónica $d(x, y) \coloneqq |x - y|$. Sea $A \subseteq \mathbb{Z}$. Demostrar que A es **acotado** si, y sólo si, A es finito.

Ejercicio 7. *6 %.*
Consideramos $\mathbb{Z}$ como subconjunto del espacio métrico $\mathbb{R}$. Demostrar que $\mathbb{Z}$ no es acotado.

Ejercicio 8. *5 %.*
Ejemplo de una función acotada. Demostrar que la siguiente función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es acotada:

$$f(t) \coloneqq \frac{t}{t^2 + 1}.$$

Ejercicio 9. *7 %.*
Pasar de una función con límite a una función no acotada. Sea $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $7 \notin f[\mathbb{R}]$, pero $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 7$. Demostrar que la función $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida mediante la siguiente regla, no es acotada.

$$g(x) \coloneqq \frac{1}{f(x) - 7}.$$

Ejercicio 10. *5 %.*
Cálculo del medidor de Cauchy. Dada una sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, calcular su "medidor de Cauchy" γ_a y determinar si a es de Cauchy.

$$a_k := \frac{2 + (-1)^n}{n}, \qquad \gamma_a(m) := \sup_{j,k\geqslant m} |a_j - a_k|.$$

Ejercicio 11. *5 %.*
Sucesión de Cauchy con una subsucesión convergente. Sean (X, d) un espacio métrico, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X, $b \in X$, $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una sucesión estrictamente creciente, tales que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{\nu(k)} = b$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = b$.

Ejercicio 12. *5 %.*
Criterio de Heine de funciones continuas entre espacios métricos. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos, $f\colon X \to Y$, $a \in X$. Demostrar que las siguientes dos condiciones son equivalentes entre si:

(a) f es continua en a;

(b) para cada sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, si $t_n \to a$ cuando $n \to \infty$, entonces $f(t_n) \to f(a)$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 13. *5 %.*
Ejemplo de función uniformemente continua. Para la función dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ calcular o acotar bien su medidor de continuidad uniforme ω_f y demostrar que f es uniformemente continua.

$$X := \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{-|x|}, \qquad \omega_f(\delta) := \sup\Big\{|f(x) - f(y)|\colon\ x, y \in X,\ |x - y| \leqslant \delta\Big\}.$$

Ejercicio 14. *8 %.*
Ejemplo de función que no es uniformemente continua. Para la función dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ calcular o acotar bien por abajo su medidor de continuidad uniforme ω_f y demostrar que f no es uniformemente continua.

$$X := \mathbb{R}, \qquad f(x) := \cos(x^3), \qquad \omega_f(\delta) := \sup\Big\{|f(x) - f(y)|\colon\ x, y \in X,\ |x - y| \leqslant \delta\Big\}.$$

Ejercicio 15. *5 %.*
Ejemplo simple de función contractiva. Consideremos la función f definida en el conjunto X mediante la siguiente regla.

$$X := [1, 3], \qquad f(x) := -\frac{x^2}{6} + \frac{4}{3}x.$$

I. Demostrar que $f(x) \in X$ para cada x en X.
II. Calcular $M_1 := \inf_{x \in \mathrm{int}(X)} f'(x)$, $M_2 := \sup_{x \in \mathrm{int}(X)} f'(x)$,

$$M := \sup_{x \in \mathrm{int}(X)} |f'(x)|.$$

III. Encontrar p en X tal que $f(p) = p$. En este ejemplo es suficiente adivinar p y comprobar que $f(p) = p$.
IV. Sea $x_0 := 1$. Calcular $x_1 := f(x_0)$, $x_2 := f(x_1)$. Calcular los cocientes

$$q_1 := \frac{|x_1 - p|}{|x_0 - p|}, \qquad q_2 := \frac{|x_2 - p|}{|x_1 - p|}.$$

Ejercicio 16. *7 %.*
Ejemplo de función contractiva. Sea $a > 1$. Consideremos la función f definida en el conjunto X mediante la siguiente regla.

$$X := \left[\sqrt{5}, +\infty\right), \qquad f(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right).$$

I. Demostrar que $f(x) \in X$ para cada x en X.
II. Calcular o acotar de manera apropiada los números $M_1 := \inf_{x \in \mathrm{int}(X)} f'(x)$, $M_2 := \sup_{x \in \mathrm{int}(X)} f'(x)$,

$$M := \sup_{x \in \mathrm{int}(X)} |f'(x)|.$$

III. En algún lenguaje de programación programar el algoritmo de iteración simple (conocido también como el método del punto fijo) y con ese programa calcular p en X tal que $f(p) = p$. Se recomienda empezar con $x_0 := 5$.
IV. Calcular $x_1 := f(x_0)$, $x_2 := f(x_1)$. Calcular los cocientes

$$q_1 := \frac{|x_1 - p|}{|x_0 - p|}, \qquad q_2 := \frac{|x_2 - p|}{|x_1 - p|}.$$

Ejercicio 17. *5 %.*
Los segmentos de la recta real son espacios métricos totalmente acotados. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Denotamos por X el segmento $[a, b]$ con la distancia inducida de $\mathbb{R}$. Demostrar de manera directa que X es un espacio métrico totalmente acotado. En otras palabras, para $\varepsilon > 0$ general construir una ε-red finita en X.

Ejercicio 18. *5 %.*
Ejemplo de demostración del límite por definición. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^3 - 3x + 5.$$

Demostrar que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 7$ trabajando directamente con la definición del límite, en el lenguaje de ε y δ.

Análisis Matemático IV. Tarea "Espacios métricos".
Variante 0.

Ejemplos de espacios métricos, bolas en espacios métricos, la topología del espacio métrico, la distancia entre puntos y conjuntos en espacios métricos, conjuntos acotados en espacios métricos, funciones acotadas, sucesiones de Cauchy, funciones uniformemente continuas, funciones contractivas, espacios métricos totalmente acotados.

Ejercicio 1. *5 %.*
Los números naturales con una distancia especial. Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Definimos $d\colon \mathbb{N}^2 \to [0, +\infty)$,

$$d(m, n) := \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|.$$

I. Demostrar que d es una distancia.

II. Para cada m en $\mathbb{N}$ encontrar $r > 0$ tal que $B_d(m, r) = \{m\}$.

III. Demostrar que la topología τ_d inducida por d es discreta, es decir, $\tau_d = 2^{\mathbb{N}}$.

IV. Demostrar que si una sucesión en $(\mathbb{N}, d)$ converge, entonces es una constante, a partir de cierto índice.

V. Encontrar en $(\mathbb{N}, d)$ una sucesión de Cauchy que no converge.

Ejercicio 2. *5 %.*
La frontera de la bola abierta está contenida en la esfera. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $a \in X$, $r > 0$. Demostrar que

$$\operatorname{fr}(B(a, r)) \subseteq S(a, r).$$

Ejercicio 3. *6 %.*
La frontera de una bola abierta puede no coincidir con la esfera. Encontrar un espacio métrico (X, d), un punto a en X y un número $r > 0$ tales que

$$\operatorname{fr}(B(a, r)) \neq S(a, r).$$

Ejercicio 4. *5 %.*
Descripción de los conjuntos cerrados en términos de bolas. Sea (X, d) un espacio métrico. Denotemos por τ_d la topología inducida por d. Sea $Y \subseteq X$. Demostrar que las siguientes dos condiciones son equivalentes entre si:

(a) $X \setminus Y \in \tau_d$;

(b) $\forall x \in X \quad \Big((\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap Y \neq \varnothing) \quad \Rightarrow \quad x \in Y \Big)$.

Ejercicio 5. *5 %.*
Separación de dos conjuntos en espacios métricos por medio de una función continua. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $P, Q \subseteq X$ tales que

$$P \neq \varnothing, \qquad Q \neq \varnothing, \qquad d(P, Q) > 0.$$

Construir $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ para cada x en P y $f(x) = 1$ para cada y en Q.

Ejercicio 6. *5 %.*
Criterio de conjuntos acotados en espacios normados. Sea V un espacio normado y sea $A \subseteq V$. Demostrar que las siguientes dos condiciones son equivalentes.

(a) $\operatorname{diam}(A) < +\infty$;

(b) existe $R > 0$ tal que $A \subseteq B(0_V, R)$.

Ejercicio 7. *6 %.*
En los espacios normados, los subespacios no triviales no son acotados. Sea V un espacio normado y sea W un subespacio de V tal que $W \neq \{0_V\}$. Demostrar que W es un conjunto no acotado.

Ejercicio 8. *5 %.*
Ejemplo de una función acotada. Demostrar que la siguiente función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es acotada:

$$f(x, y) \coloneqq \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Ejercicio 9. *7 %.*
Cada función convexa no constante es no acotada. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa no constante. Demostrar que $\sup(f[\mathbb{R}]) = +\infty$.

Sugerencias. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a < b < c$ y $f(a) \neq f(c)$. Aplicar la definición de función convexa y mostrar que $f(a) > f(b)$ o $f(c) > f(b)$. En el primer caso, para cada $t < a$ aplicar la definición de función convexa con los puntos t, a, b.

Ejercicio 10. *5 %.*
Cálculo del medidor de Cauchy. Dada una sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, calcular su “medidor de Cauchy” γ_a y determinar si a es de Cauchy.

$$a_k := 5 + \cos\frac{k\pi}{2}, \qquad \gamma_a(m) := \sup_{j,k\geqslant m} |a_j - a_k|.$$

Sugerencia: para empezar, se recomienda calcular a_k para los casos $k \in 4\mathbb{N}$, $k \in 4\mathbb{N} - 3$, $k \in 4\mathbb{N} - 2$, $k \in 4\mathbb{N} - 1$.

Ejercicio 11. *5 %.*
Cada sucesión de Cauchy contiene una subsucesión regular de Cauchy. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Demostrar que existe una sucesión estrictamente creciente $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $d(a_{\nu(k)}, a_{\nu(k+1)}) \leqslant 2^{-k-1}$ para cada k en $\mathbb{N}$.

Ejercicio 12. *5 %.*
Criterio de funciones continuas en términos de las cerraduras. Sean X, Y espacios topológicos y sea $f\colon X \to Y$. Demostrar que las siguientes dos condiciones son equivalentes entre si:

(a) f es continua;

(b) para $A \subseteq X$, $f[\mathrm{cl}_X(A)] \subseteq \mathrm{cl}_Y(f[A])$.

Ejercicio 13. *5 %.*
Ejemplo de función uniformemente continua. Para la función dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ calcular o acotar bien su medidor de continuidad uniforme ω_f y demostrar que f es uniformemente continua.

$$X := \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{x}{x^2+1}, \qquad \omega_f(\delta) := \sup\Big\{|f(x) - f(y)|\colon\ x, y \in X,\ |x - y| \leqslant \delta\Big\}.$$

Ejercicio 14. *8 %.*
Ejemplo de función que no es uniformemente continua. Para la función dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ calcular o acotar bien por abajo su medidor de continuidad uniforme ω_f y demostrar que f no es uniformemente continua.

$$X := \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^3, \qquad \omega_f(\delta) := \sup\Big\{|f(x) - f(y)|\colon\ x, y \in X,\ |x - y| \leqslant \delta\Big\}.$$

Ejercicio 15. *5 %.*
Ejemplo simple de función contractiva. Consideremos la función f definida en el conjunto X mediante la siguiente regla.

$$X := [-2, 0], \qquad f(x) := -\frac{x^2+4}{5}.$$

I. Demostrar que $f(x) \in X$ para cada x en X.
II. Calcular $M_1 := \inf_{x\in\operatorname{int}(X)} f'(x)$, $M_2 := \sup_{x\in\operatorname{int}(X)} f'(x)$,

$$M := \sup_{x\in\operatorname{int}(X)} |f'(x)|.$$

III. Encontrar p en X tal que $f(p) = p$. En este ejemplo es suficiente adivinar p y comprobar que $f(p) = p$.
IV. Sea $x_0 := -2$. Calcular $x_1 := f(x_0)$, $x_2 := f(x_1)$. Calcular los cocientes

$$q_1 := \frac{|x_1 - p|}{|x_0 - p|}, \qquad q_2 := \frac{|x_2 - p|}{|x_1 - p|}.$$

Ejercicio 16. *7 %.*
Ejemplo de función contractiva. Consideremos la función f definida en el conjunto X mediante la siguiente regla.

$$X := \left[\sqrt[3]{7}, +\infty\right), \qquad f(x) := \frac{2x}{3} + \frac{7}{3x^2}.$$

I. Demostrar que $f(x) \in X$ para cada x en X.
II. Calcular o acotar de manera apropiada los números $M_1 := \inf_{x\in\operatorname{int}(X)} f'(x)$, $M_2 := \sup_{x\in\operatorname{int}(X)} f'(x)$,

$$M := \sup_{x\in\operatorname{int}(X)} |f'(x)|.$$

III. En algún lenguaje de programación programar el algoritmo de iteración simple (conocido también como el método del punto fijo) y con ese programa calcular p en X tal que $f(p) = p$. Se recomienda empezar con $x_0 := 7$.
IV. Calcular $x_1 := f(x_0)$, $x_2 := f(x_1)$. Calcular los cocientes

$$q_1 := \frac{|x_1 - p|}{|x_0 - p|}, \qquad q_2 := \frac{|x_2 - p|}{|x_1 - p|}.$$

Ejercicio 17. *5 %.*
El cubo unitario en $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico totalmente acotado. En el espacio $\mathbb{R}^n$ con la distancia euclidiana consideramos el subespacio $X := [0,1]^n$. Demostrar de manera directa que X es un espacio métrico totalmente acotado. En otras palabras, para $\varepsilon > 0$ general construir una ε-red finita en X.

Ejercicio 18. *5 %.*
Ejemplo de demostración del límite por definición. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^3 - 3x + 5.$$

Demostrar que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 7$ trabajando directamente con la definición del límite, en el lenguaje de ε y δ.

Análisis Matemático IV. Tarea "Espacios métricos".
Variante 1.

Ejemplos de espacios métricos, bolas en espacios métricos, la topología del espacio métrico, la distancia entre puntos y conjuntos en espacios métricos, conjuntos acotados en espacios métricos, funciones acotadas, sucesiones de Cauchy, funciones uniformemente continuas, funciones contractivas, espacios métricos totalmente acotados.

Ejercicio 1. *5 %.*
Subespacios métricos. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Denotemos $d|_{Y\times Y}$ por ρ.

I. Demostrar que (Y, ρ) es un espacio métrico.

II. Demostrar que si $A \in \tau_d$, entonces $A \cap Y \in \tau_\rho$.

III. Demostrar que si $Q \in \tau_\rho$, entonces existe $A \in \tau_d$ tal que $Q = A \cap Y$.

IV. Usando los resultados de los incisos II y III, describir τ_ρ en términos de τ_d.

V. En el espacio $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual d construir Y y Q tales que $Q \in \tau_\rho$, pero $Q \notin \tau_d$.

Ejercicio 2. *5 %.*
La intersección de dos bolas abiertas es vacía, si la distancia entre sus centros es mayor o igual a la suma de los radios. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$. Supongamos que $d(a_1, a_2) \geqslant r_1 + r_2$. Demostrar que

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \varnothing.$$

Ejercicio 3. *6 %.*
La intersección de dos bolas puede ser vacía, aunque la distancia entre los centros es menor que la suma de los radios. Encontrar un subespacio métrico X del espacio $\mathbb{R}^2$, dos puntos a_1, a_2 en X y dos números $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$d(a_1, a_2) < r_1 + r_2, \qquad B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \varnothing.$$

Ejercicio 4. *5 %.*
Las bolas cerradas son cerradas. Sea (X, d) un espacio métrico. Denotemos por τ_d la topología inducida por d. Sean $a \in X$, $r > 0$. Demostrar que

$$X \setminus C(a, r) \in \tau_d,$$

donde $C(a, r) := \big\{x \in X\colon\ d(x, a) \leqslant r\big\}$.

Ejercicio 5. *5 %.*
Descripción de la cerradura del conjunto en el espacio métrico por medio de sus vecindades uniformes. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Demostrar que

$$\mathrm{cl}(Y) = \{x \in X: \quad D_Y(x) = 0\} = \bigcap_{\varepsilon>0} V(Y, \varepsilon),$$

donde

$$V(Y, \varepsilon) := \{x \in X: \quad D_Y(x) < \varepsilon\}, \qquad D_Y(x) := \inf_{y \in Y} d(x, y).$$

Ejercicio 6. *5 %.*
Una cota superior para el diámetro de la unión de un conjunto acotado con un conjunto unipuntual. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ tal que $\mathrm{diam}(A) < +\infty$. Sea $b \in X$. Pongamos $C := A \cup \{b\}$. Demostrar que

$$\mathrm{diam}(C) \leqslant \mathrm{diam}(A) + d(b, A).$$

Hacer un dibujo que ayude a entender la idea de la parte principal de la demostración. Indicación: hay que resolver este ejercicio de manera directa; no está permitido usar resultados más generales sobre el diámetro de la unión de dos conjuntos.

Ejercicio 7. *6 %.*
El intervalo $(-1, 1)$ con una distancia no canónica no es espacio acotado. Sea $X = (-1, 1)$. Definimos $\rho\colon X \to [0, +\infty)$,

$$\rho(x, y) := \left|\tan\frac{\pi x}{2} - \tan\frac{\pi y}{2}\right|.$$

Verificar que (X, ρ) es una espacio métrico. Mostrar que este espacio no es acotado.

Ejercicio 8. *5 %.*
Las funciones polinomiales son acotadas en los intervalos acotados. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ una función polinomial:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k,$$

donde $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$. Demostrar de manera explícita que f es acotada, es decir, encontrar una superior explícita para los valores de $|f|$.

Ejercicio 9. *7 %.*
Cada polinomio no constante es una función no acotada. Sea $m \in \mathbb{N}$ y sean $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Supongamos que $a_m \neq 0$. Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \sum_{k=0}^{m} a_k x^k.$$

Demostrar que f no es acotada.

Sugerencia: factorizar $|x^m|$ y analizar el comportamiento de $f(x)$, cuando $|x|$ es grande.

Ejercicio 10. *5 %.*
Cálculo del medidor de Cauchy. Dada una sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, calcular su "medidor de Cauchy" γ_a y determinar si a es de Cauchy.

$$a_k := 2 \cdot (-1)^k + \frac{1}{k}, \qquad \gamma_a(m) := \sup_{j,k\geqslant m} |a_j - a_k|.$$

Sugerencia: para empezar, se recomienda calcular a_k para los casos $k \in 2\mathbb{N}$ y $k \in 2\mathbb{N} - 1$.

Ejercicio 11. *5 %.*
Una función continua que no preserva sucesiones de Cauchy. Encontrar espacios métricos (X, d_X), (Y, d_Y), una función continua $f\colon X \to Y$ y una sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tales que la sucesión $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no sea de Cauchy.

Ejercicio 12. *5 %.*
Las funciones continuas inyectivas, los interiores y las imágenes. Sean X, Y espacios topológicos sea $f\colon X \to Y$ una función continua e inyectiva, y sea $A \subseteq X$. Demostrar que

$$\operatorname{int}_Y(f[A]) \subseteq f[\operatorname{int}_X(A)].$$

Sugerencia. Demostrar y usar las siguientes propiedades de las imágenes e preimágenes.

I. Si $f\colon X \to Y$ es inyectiva y $A \subseteq X$, entonces $f^{-1}[f[A]] = A$.

II. Si $f\colon X \to Y$ y $B \subseteq f[X]$, entonces $f[f^{-1}[B]] = B$.

Ejercicio 13. *5 %.*
Ejemplo de función uniformemente continua. Para la función dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ calcular o acotar bien su medidor de continuidad uniforme ω_f y demostrar que f es uniformemente continua.

$$X := \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{x}{|x| + 3}, \qquad \omega_f(\delta) := \sup\Big\{|f(x) - f(y)|\colon\ x, y \in X,\ |x - y| \leqslant \delta\Big\}.$$

Ejercicio 14. *8 %.*
Ejemplo de función que no es uniformemente continua. Para la función dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ calcular o acotar bien por abajo su medidor de continuidad uniforme ω_f y demostrar que f no es uniformemente continua.

$$X := (0, +\infty), \qquad f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad \omega_f(\delta) := \sup\Big\{|f(x) - f(y)|\colon\ x, y \in X,\ |x - y| \leqslant \delta\Big\}.$$

Ejercicio 15. *5 %.*
Ejemplo simple de función contractiva. Consideremos la función f definida en el conjunto X mediante la siguiente regla.

$$X := [0,2], \qquad f(x) := \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + 1.$$

I. Demostrar que $f(x) \in X$ para cada x en X.
II. Calcular $M_1 := \inf_{x \in \operatorname{int}(X)} f'(x)$, $M_2 := \sup_{x \in \operatorname{int}(X)} f'(x)$,

$$M := \sup_{x \in \operatorname{int}(X)} |f'(x)|.$$

III. Encontrar p en X tal que $f(p) = p$. En este ejemplo es suficiente adivinar p y comprobar que $f(p) = p$.
IV. Sea $x_0 := 2$. Calcular $x_1 := f(x_0)$, $x_2 := f(x_1)$. Calcular los cocientes

$$q_1 := \frac{|x_1 - p|}{|x_0 - p|}, \qquad q_2 := \frac{|x_2 - p|}{|x_1 - p|}.$$

Ejercicio 16. *7 %.*
Ejemplo de función contractiva. Consideremos la función f definida en el conjunto X mediante la siguiente regla.

$$X := [0,2], \qquad f(x) := \frac{\cos(x) + 2}{3}.$$

I. Demostrar que $f(x) \in X$ para cada x en X.
II. Calcular o acotar de manera apropiada los números $M_1 := \inf_{x \in \operatorname{int}(X)} f'(x)$, $M_2 := \sup_{x \in \operatorname{int}(X)} f'(x)$,

$$M := \sup_{x \in \operatorname{int}(X)} |f'(x)|.$$

III. En algún lenguaje de programación programar el algoritmo de iteración simple (conocido también como el método del punto fijo) y con ese programa calcular p en X tal que $f(p) = p$. Se recomienda empezar con $x_0 = 1$.
IV. Calcular $x_1 := f(x_0)$, $x_2 := f(x_1)$. Calcular los cocientes

$$q_1 := \frac{|x_1 - p|}{|x_0 - p|}, \qquad q_2 := \frac{|x_2 - p|}{|x_1 - p|}.$$

Ejercicio 17. *5 %.*
Cada espacio métrico totalmente acotado es separable. Sea (X, d) un espacio métrico totalmente acotado. Demostrar que este espacio es separable.

Ejercicio 18. *5 %.*
Ejemplo de demostración del límite por definición. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := -x^3 + 2x - 4.$$

Demostrar que $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 17$ trabajando directamente con la definición del límite, en el lenguaje de ε y δ.

Análisis Matemático IV. Tarea "Espacios métricos".
Variante 2.

Ejemplos de espacios métricos, bolas en espacios métricos, la topología del espacio métrico, la distancia entre puntos y conjuntos en espacios métricos, conjuntos acotados en espacios métricos, funciones acotadas, sucesiones de Cauchy, funciones uniformemente continuas, funciones contractivas, espacios métricos totalmente acotados.

Ejercicio 1. *5 %.*
Ejemplo de espacio métrico: un país con vuelos a través de la capital. Definimos $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$ mediante la siguiente regla:

$$\rho(a, b) := \begin{cases} |a| + |b|, & a \neq b; \\ 0, & a = b. \end{cases}$$

I. Demostrar que $(\mathbb{R}, \rho)$ es un espacio métrico.

II. Dado $r > 0$, calcular $B_\rho(0, r)$.

III. Dados $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y > 0 , calcular $B_\rho(a, r)$. Considerar los casos $r \leqslant |a|$ y $r > |a|$.

Ejercicio 2. *5 %.*
Una condición suficiente para la contención de las bolas. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$. Supongamos que $d(a_1, a_2) + r_1 \leqslant r_2$. Demostrar que

$$B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2).$$

Ejercicio 3. *6 %.*
Una bola de radio mayor puede ser subconjunto propio de una bola de radio menor. Consideramos el subespacio métrico $X = [0, +\infty)^2$ del espacio $\mathbb{R}^2$. Encontrar dos puntos a_1, a_2 en X y dos números $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$r_1 < r_2, \qquad B(a_2, r_2) \subsetneq B(a_1, r_1).$$

Ejercicio 4. *5 %.*
La topología del espacio métrico es de Hausdorff. Sea (X, d) un espacio métrico. Denotemos por τ_d la topología inducida por d. Sean $a_1, a_2 \in X$. Construir $P, Q \in \tau_d$ tales que

$$a_1 \in P, \qquad a_2 \in Q, \qquad P \cap Q = \varnothing.$$

Ejercicio 5. *5 %.*
Descripción del interior del conjunto en el espacio métrico por medio de su distancia al complemento. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Demostrar que

$$\operatorname{int}_d(Y) = \Big\{x \in X: \quad D_{X \setminus Y}(x) > 0\Big\},$$

donde $D_A(x) := \inf_{a \in A} d(x, a)$.

Ejercicio 6. *5 %.*
Las envolturas convexas de los conjuntos acotados son conjuntos acotados. Sea V un espacio normado complejo y sea $A \subseteq V$ tal que A es acotado. Demostrar que $\operatorname{conv}(A)$ es acotado. Se recomienda usar el criterio de conjuntos acotados en espacios normados.

Ejercicio 7. *6 %.*
Criterio de subconjunto no acotado en $\mathbb{R}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Demostrar que las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $\operatorname{diam}(A) = +\infty$;

(b) $\inf(A) = -\infty$ o $\sup(A) = +\infty$.

Ejercicio 8. *5 %.*
Ejemplo de una función acotada. Demostrar que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida mediante la siguiente regla, es acotada:

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)\sin(x^2)}{x^4 + 5 - \cos(\sqrt[3]{x})}.$$

Ejercicio 9. *7 %.*
Ejemplo de función no acotada que no tiende al infinito. Construir una función $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ que tenga todas las siguientes propiedades.

A. f es continuamente derivable.

B. f es no acotada.

C. No es cierto que $f(t) \to +\infty$, cuando $t \to +\infty$.

Se recomienda construir f usar alguna función potencial, alguna función trigonométrica y operaciones aritméticas.

Ejercicio 10. *5 %.*
Cálculo del medidor de Cauchy. Dada una sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, calcular su “medidor de Cauchy” γ_a y determinar si a es de Cauchy.

$$a_k := \sqrt{k}, \qquad \gamma_a(m) := \sup_{j,k\geqslant m} |a_j - a_k|.$$

Ejercicio 11. *5 %.*
La imagen de la sucesión de Cauchy respecto a la función uniformemente continua es una sucesión de Cauchy. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X, $f\colon X \to Y$ una función uniformemente continua. Demostrar que $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

Ejercicio 12. *5 %.*
Criterio de continuidad en términos de las cerraduras y las preimágenes. Sean X, Y espacios topológicos y sea $f\colon X \to Y$ y sea $f\colon X \to Y$. Demostrar que las siguientes dos condiciones son equivalentes entre si:

(a) f es continua;

(b) para cada $G \subseteq X$ se cumple que $\mathrm{cl}_X(f^{-1}[G]) \subseteq f^{-1}[\mathrm{cl}_Y(G)]$.

Ejercicio 13. *5 %.*
Ejemplo de función uniformemente continua. Para la función dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ calcular o acotar bien su medidor de continuidad uniforme ω_f y demostrar que f es uniformemente continua.

$$X := \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sin(\sqrt{|x|}), \qquad \omega_f(\delta) := \sup\Big\{|f(x) - f(y)|\colon\ x, y \in X,\ |x - y| \leqslant \delta\Big\}.$$

Ejercicio 14. *8 %.*
Ejemplo de función que no es uniformemente continua. Para la función dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ calcular o acotar bien por abajo su medidor de continuidad uniforme ω_f y demostrar que f no es uniformemente continua.

$$X := \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sqrt{x^4 + 1}, \qquad \omega_f(\delta) := \sup\Big\{|f(x) - f(y)|\colon\ x, y \in X,\ |x - y| \leqslant \delta\Big\}.$$

Ejercicio 15. *5 %.*
Ejemplo simple de función contractiva. Consideremos la función f definida en el conjunto X mediante la siguiente regla.

$$X := [2,4], \qquad f(x) := \frac{-x^2+6x+3}{4}.$$

I. Demostrar que $f(x) \in X$ para cada x en X.
II. Calcular $M_1 := \inf_{x\in\operatorname{int}(X)} f'(x)$, $M_2 := \sup_{x\in\operatorname{int}(X)} f'(x)$,

$$M := \sup_{x\in\operatorname{int}(X)} |f'(x)|.$$

III. Encontrar p en X tal que $f(p) = p$. En este ejemplo es suficiente adivinar p y comprobar que $f(p) = p$.
IV. Sea $x_0 = 2$. Calcular $x_1 := f(x_0)$, $x_2 := f(x_1)$. Calcular los cocientes

$$q_1 := \frac{|x_1 - p|}{|x_0 - p|}, \qquad q_2 := \frac{|x_2 - p|}{|x_1 - p|}.$$

Ejercicio 16. *7 %.*
Ejemplo de función contractiva. Consideremos la función f definida en el conjunto X mediante la siguiente regla.

$$X := [0,2], \qquad f(x) := \frac{2^x+1}{5}.$$

I. Demostrar que $f(x) \in X$ para cada x en X.
II. Calcular o acotar de manera apropiada los números $M_1 := \inf_{x\in\operatorname{int}(X)} f'(x)$, $M_2 := \sup_{x\in\operatorname{int}(X)} f'(x)$,

$$M := \sup_{x\in\operatorname{int}(X)} |f'(x)|.$$

III. En algún lenguaje de programación programar el algoritmo de iteración simple (conocido también como el método del punto fijo) y con ese programa calcular p en X tal que $f(p) = p$. Se recomienda empezar con $x_0 = 1$.
IV. Calcular $x_1 := f(x_0)$, $x_2 := f(x_1)$. Calcular los cocientes

$$q_1 := \frac{|x_1 - p|}{|x_0 - p|}, \qquad q_2 := \frac{|x_2 - p|}{|x_1 - p|}.$$

Ejercicio 17. *5 %.*
La propiedad de ser totalmente acotado es hereditaria. Sea (X,d) un espacio métrico totalmente acotado y sea $Y \subseteq X$. Consideramos Y como subespacio del espacio métrico X. Demostrar de manera directa que Y es totalmente acotado.

Ejercicio 18. *5 %.*
Ejemplo de demostración del límite por definición. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := 2x^3 - 3x^2 - 7.$$

Demostrar que $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -12$ trabajando directamente con la definición del límite, en el lenguaje de ε y δ.

Análisis Matemático IV. Tarea "Espacios métricos".
Variante 3.

Ejemplos de espacios métricos, bolas en espacios métricos, la topología del espacio métrico, la distancia entre puntos y conjuntos en espacios métricos, conjuntos acotados en espacios métricos, funciones acotadas, sucesiones de Cauchy, funciones uniformemente continuas, funciones contractivas, espacios métricos totalmente acotados.

Ejercicio 1. *5 %.*
La distancia de Hamming. Sea A un conjunto y sea $n \in \mathbb{N}$. Pongamos $X \coloneqq A^n$. Definimos $\rho\colon X^2 \to [0, +\infty)$,

$$\rho(x, y) \coloneqq \#\Big\{j \in \{1, \ldots, n\}\colon\ x_j \neq y_j\Big\}.$$

I. Demostrar que (X, ρ) es un espacio métrico.

II. Dado x en X, encontrar $r > 0$ tal que $B_\rho(x, r) = \{x\}$.

II. Demostrar que la topología τ_ρ inducida por ρ es discreta, es decir, $\tau_\rho = 2^X$.

Ejercicio 2. *5 %.*
La bola abierta está contenida en el interior de la bola cerrada del mismo radio. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $a \in X$, $r > 0$. Demostrar que

$$B(a, r) \subseteq \operatorname{int}(C(a, r)),$$

donde $C(a, r) \coloneqq \Big\{x \in X\colon\ d(x, a) \leqslant r\Big\}$.

Ejercicio 3. *6 %.*
El interior de una bola cerrada puede no coincidir con la bola abierta del mismo radio. Encontrar un espacio métrico (X, d), un punto a en X y un número $r > 0$ tales que

$$B(a, r) \neq \operatorname{int}(\overline{B}(a, r)).$$

Ejercicio 4. *5 %.*
El interior topológico y el interior métrico. Sea (X, d) un espacio métrico. Denotemos por τ_d la topología inducida por d. Sea $Y \subseteq X$. Demostrar que $\operatorname{int}_d(Y) = \operatorname{int}_{\tau_d}(Y)$, donde

$$\operatorname{int}_d(Y) \coloneqq \Big\{x \in X\colon\quad \exists r > 0 \quad B(x, r) \subseteq Y\Big\},$$
$$\operatorname{int}_{\tau_d}(Y) \coloneqq \Big\{x \in X\colon\quad \exists A \in \tau_d \quad x \in A \quad \wedge \quad A \subseteq Y\Big\}.$$

Ejercicio 5. *5 %.*
La “semidistancia de Hausdorff” entre los subconjuntos no vacíos del espacio métrico. Sea (X, d) un espacio métrico. Denotemos por $\mathcal{S}$ al conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de X. Para cada P, Q en $\mathcal{S}$, pongamos

$$h(P, Q) := \sup_{p \in P} D_Q(p), \qquad \text{donde} \qquad D_Q(p) := \inf_{q \in Q} d(p, q).$$

Demostrar que para cada P, Q, R en $\mathcal{S}$ se cumple la desigualdad

$$h(P, R) \leqslant h(P, Q) + h(Q, R).$$

Ejercicio 6. *5 %.*
El diámetro de la cerradura del conjunto coincide con el diámetro del conjunto original. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Demostrar que

$$\operatorname{diam}(\operatorname{cl}(A)) = \operatorname{diam}(A).$$

Ejercicio 7. *6 %.*
Conjunto no acotado y sucesiones. Sea (X, d) un espacio métrico y sea Y un subconjunto de X no acotado. Además, sea $a \in X$. Demostrar que existe una sucesión $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$ tal que $d(y_k, a) \geqslant k$ para cada k en $\mathbb{N}$.

Ejercicio 8. *5 %.*
Ejemplo de una función racional acotada. Sean P, Q polinomios de una variable con coeficientes complejos tales que $\deg(P) \leqslant \deg(Q)$. Supongamos que Q no tiene ceros en $\mathbb{R}$. Definimos $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$f(t) := \frac{P(t)}{Q(t)}.$$

Demostrar que f es acotada.

Ejercicio 9. *7 %.*
Ejemplo de función que tiende al infinito, pero no es creciente. Construir una función $f \colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ que tenga todas las siguientes propiedades.

A. f es continuamente derivable.

B. $\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.

C. f no es creciente (en el sentido no estricto) en cada rayo:

$$\forall s > 0 \qquad \exists t, u \qquad \Big(s < t < u \qquad \wedge \quad f(t) > f(u)\Big).$$

Se recomienda construir f usar polinomios de grado pequeño y alguna función trigonométrica, y combinarlas con operaciones aritméticas.

Ejercicio 10. *5 %.*
Cálculo del medidor de Cauchy. Dada una sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, calcular su "medidor de Cauchy" γ_a y determinar si a es de Cauchy.

$$a_k := 2\cos\frac{2k\pi}{3}, \qquad \gamma_a(m) := \sup_{j,k\geqslant m} |a_j - a_k|.$$

Sugerencia: para empezar, se recomienda calcular a_k para los casos $k \in 3\mathbb{N}$, $k \in 3\mathbb{N}-2$, $k \in 3\mathbb{N}-1$.

Ejercicio 11. *5 %.*
La pseudodistancia natural entre las sucesiones de Cauchy. Sea (X, d) un espacio métrico.

I. Sean $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de Cauchy en X. Demostrar que $(d(a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $[0, +\infty)$.

II. Denotemos por $S(X)$ al conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en X. Definimos $\rho\colon S(X)^2 \to [0, +\infty)$,

$$\rho(a, b) := \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n).$$

Demostrar que ρ es una pseudodistancia en $S(X)$.

Ejercicio 12. *5 %.*
Criterio de continuidad en términos de las cerraduras y las imágenes. Sean X, Y espacios topológicos y sea $f\colon X \to Y$ y sea $f\colon X \to Y$. Demostrar que las siguientes dos condiciones son equivalentes entre si:

(a) f es continua;

(b) para cada $A \subseteq X$ se cumple que $f[\mathrm{cl}_X(A)] \subseteq \mathrm{cl}_Y(f[A])$.

Ejercicio 13. *5 %.*
Ejemplo de función uniformemente continua. Para la función dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ calcular o acotar bien su medidor de continuidad uniforme ω_f y demostrar que f es uniformemente continua.

$$X := \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sqrt{|x| + 1}, \qquad \omega_f(\delta) := \sup\Big\{|f(x) - f(y)|\colon\ x, y \in X,\ |x - y| \leqslant \delta\Big\}.$$

Ejercicio 14. *8 %.*
Ejemplo de función que no es uniformemente continua. Para la función dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ calcular o acotar bien por abajo su medidor de continuidad uniforme ω_f y demostrar que f no es uniformemente continua.

$$X := (0, +\infty), \qquad f(x) := \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \qquad \omega_f(\delta) := \sup\Big\{|f(x) - f(y)|\colon\ x, y \in X,\ |x - y| \leqslant \delta\Big\}.$$

Ejercicio 15. *5 %.*
Ejemplo simple de función contractiva. Consideremos la función f definida en el conjunto X mediante la siguiente regla.

$$X := [2,4], \qquad f(x) := -\frac{x^2}{3} + 2x.$$

I. Demostrar que $f(x) \in X$ para cada x en X.
II. Calcular $M_1 := \inf_{x\in\operatorname{int}(X)} f'(x)$, $M_2 := \sup_{x\in\operatorname{int}(X)} f'(x)$,

$$M := \sup_{x\in\operatorname{int}(X)} |f'(x)|.$$

III. Encontrar p en X tal que $f(p) = p$. En este ejemplo es suficiente adivinar p y comprobar que $f(p) = p$.
IV. Sea $x_0 = 4$. Calcular $x_1 := f(x_0)$, $x_2 := f(x_1)$. Calcular los cocientes

$$q_1 := \frac{|x_1 - p|}{|x_0 - p|}, \qquad q_2 := \frac{|x_2 - p|}{|x_1 - p|}.$$

Ejercicio 16. *7 %.*
Ejemplo de función contractiva. Consideremos la función f definida en el conjunto X mediante la siguiente regla.

$$X := [0,3], \qquad f(x) := \frac{\sin(x) + 3}{2}.$$

I. Demostrar que $f(x) \in X$ para cada x en X.
II. Calcular o acotar de manera apropiada los números $M_1 := \inf_{x\in\operatorname{int}(X)} f'(x)$, $M_2 := \sup_{x\in\operatorname{int}(X)} f'(x)$,

$$M := \sup_{x\in\operatorname{int}(X)} |f'(x)|.$$

III. En algún lenguaje de programación programar el algoritmo de iteración simple (conocido también como el método del punto fijo) y con ese programa calcular p en X tal que $f(p) = p$. Se recomienda empezar con $x_0 = 3$.
IV. Calcular $x_1 := f(x_0)$, $x_2 := f(x_1)$. Calcular los cocientes

$$q_1 := \frac{|x_1 - p|}{|x_0 - p|}, \qquad q_2 := \frac{|x_2 - p|}{|x_1 - p|}.$$

Ejercicio 17. *5 %.*
Los espacios totalmente acotados son acotados. Sea (X, d) un espacio métrico totalmente acotado. Demostrar que $\operatorname{diam}(X) < +\infty$.

Ejercicio 18. *5 %.*
Ejemplo de demostración del límite por definición. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^3 + x^2 - 2x.$$

Demostrar que $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = -12$ trabajando directamente con la definición del límite, en el lenguaje de ε y δ.

Análisis Matemático IV. Tarea "Espacios métricos".
Variante 4.

Ejemplos de espacios métricos, bolas en espacios métricos, la topología del espacio métrico, la distancia entre puntos y conjuntos en espacios métricos, conjuntos acotados en espacios métricos, funciones acotadas, sucesiones de Cauchy, funciones uniformemente continuas, funciones contractivas, espacios métricos totalmente acotados.

Ejercicio 1. *5 %.*
Una receta para construir una distancia usando una distancia dada y una función cóncava. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\eta\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una función cóncava, esto es, para cada t, u en $[0, +\infty)$ y cada λ en $[0, 1]$,

$$\eta((1 - \lambda)t + \lambda u) \geqslant (1 - \lambda)\eta(t) + \lambda\eta(u).$$

Además, suponemos que η es estrictamente creciente y $\eta(0) = 0$. Definimos $\rho\colon X^2 \to [0, +\infty)$ mediante la siguiente regla:

$$\rho(x, y) := \eta(d(x, y)).$$

Demostrar que ρ es una distancia.

Ejercicio 2. *5 %.*
La intersección de dos bolas abiertas es vacía, si la distancia entre sus centros es mayor o igual a la suma de los radios. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$. Supongamos que $d(a_1, a_2) \geqslant r_1 + r_2$. Demostrar que

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \varnothing.$$

Ejercicio 3. *6 %.*
La intersección de dos bolas puede ser vacía, aunque la distancia entre los centros es menor que la suma de los radios. Consideramos el espacio $\mathbb{Z}$ con la distancia

$$d(x, y) := \begin{cases} |x| + |y|, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Verificar que se cumple la desigualdad del triángulo. Encontrar dos puntos a_1, a_2 en X y dos números $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$d(a_1, a_2) < r_1 + r_2, \qquad B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \varnothing.$$

Ejercicio 4. *5 %.*
Una descripción de la frontera en términos de bolas. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $Y \subseteq X$. Demostrar que $P = Q$, donde

$$P = X \setminus \big(\operatorname{int}_d(Y) \cup \operatorname{int}_d(X \setminus Y)\big),$$
$$Q = \Big\{x \in X\colon \quad \forall r > 0 \quad \big(B(x, r) \cap Y \neq \varnothing \quad \wedge \quad B(x, r) \setminus Y \neq \varnothing\big)\Big\}.$$

Ejercicio 5. *5 %.*
Ejemplo, cuando para la distancia-ínfimo entre los conjuntos no se cumple la desigualdad del tríangulo. Dado un espacio métrico (X, d), denotamos por $\mathcal{P}_1(X)$ al conjunto de los subconjuntos no vacíos de X y definimos $F\colon \mathcal{P}_1(X)^2 \to [0, +\infty)$ mediante la regla

$$F(A, B) := \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b).$$

Encontrar un espacio métrico (X, d) y conjuntos $A, B, C \in \mathcal{P}_1(X)$ tales que

$$F(A, B) > F(A, C) + F(C, B).$$

Ejercicio 6. *5 %.*
En los espacios normados, la suma de dos conjuntos acotados es un conjunto acotado. Sea V un espacio normado y sean $P, Q \subseteq V$ conjuntos acotados. Demostrar que $P + Q$ es un conjunto acotado.

Ejercicio 7. *6 %.*
Espacio métrico no acotado y dos subconjuntos no acotados. Sean (X, d) un espacio métrico no acotado.

I. Mostrar que existe $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $d(a_{k+1}, \{a_1, \ldots, a_k\}) \geqslant k$ para cada k en $\mathbb{N}$;

II. Encontrar dos conjuntos $Y, Z \subseteq X$ no acotados tales que $Y \cap Z = \emptyset$.

Ejercicio 8. *5 %.*
Ejemplo de una función acotada.
I. Demostar que si $x, y > 0$, entonces $x^2 - xy + y^2 > 0$.
II. Sea $f\colon (0, +\infty)^2 \to (0, +\infty)$,

$$f(x, y) := \frac{xy}{x^2 - xy + y^2}.$$

Demostrar que f es acotada.

Ejercicio 9. *7 %.*
La suma de dos funciones no acotadas puede ser acotada. Construir dos funciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no acotadas tales que $f + g$ sea acotada. Demostrar bien que f y g son no acotadas.

Ejercicio 10. *5 %.*
Cálculo del medidor de Cauchy. Dada una sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, calcular su “medidor de Cauchy” γ_a y determinar si a es de Cauchy.

$$a_k := 3 \cdot (-1)^k + \frac{1}{k}, \qquad \gamma_a(m) := \sup_{j,k\geqslant m} |a_j - a_k|.$$

Ejercicio 11. *5 %.*
Cada sucesión regular de Cauchy es una sucesión de Cauchy. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy, esto es,

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad d(a_k, a_{k+1}) < 2^{-k-1}.$$

Acotar de manera adecuada el medidor de Cauchy de la sucesión a y demostrar que a es de Cauchy.

Ejercicio 12. *5 %.*
Criterio de continuidad en términos de bases de topologías. Sean X, Y espacios topológicos, $\mathcal{A}$ una base de topología de X $\mathcal{B}$ una base de topología de Y, $f\colon X \to Y$. Demostrar que las siguientes dos condiciones son equivalentes entre si:

(a) f es continua;

(b) para cada Q en $\mathcal{B}$ existe P en $\mathcal{A}$ tal que $f[P] \subseteq Q$.

Ejercicio 13. *5 %.*
Ejemplo de función uniformemente continua. Para la función dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ calcular o acotar bien su medidor de continuidad uniforme ω_f y demostrar que f es uniformemente continua.

$$X := \mathbb{R}, \qquad f(x) := x\, e^{-|x|}, \qquad \omega_f(\delta) := \sup\bigl\{|f(x) - f(y)|:\ x, y \in X,\ |x - y| \leqslant \delta\bigr\}.$$

Ejercicio 14. *8 %.*
Ejemplo de función que no es uniformemente continua. Para la función dada $f\colon X \to \mathbb{R}$ calcular o acotar bien por abajo su medidor de continuidad uniforme ω_f y demostrar que f no es uniformemente continua.

$$X := (0, +\infty), \qquad f(x) := \operatorname{sen}(x^2), \qquad \omega_f(\delta) := \sup\bigl\{|f(x) - f(y)|:\ x, y \in X,\ |x - y| \leqslant \delta\bigr\}.$$

Ejercicio 15. *5 %.*
Ejemplo simple de función contractiva. Consideremos la función f definida en el conjunto X mediante la siguiente regla.

$$X := [3, 5], \qquad f(x) := \frac{-x^2 + 8x + 4}{5}.$$

I. Demostrar que $f(x) \in X$ para cada x en X.
II. Calcular $M_1 := \inf_{x \in \operatorname{int}(X)} f'(x)$, $M_2 := \sup_{x \in \operatorname{int}(X)} f'(x)$,

$$M := \sup_{x \in \operatorname{int}(X)} |f'(x)|.$$

III. Encontrar p en X tal que $f(p) = p$. En este ejemplo es suficiente adivinar p y comprobar que $f(p) = p$.
IV. Sea $x_0 = 3$. Calcular $x_1 := f(x_0)$, $x_2 := f(x_1)$. Calcular los cocientes

$$q_1 := \frac{|x_1 - p|}{|x_0 - p|}, \qquad q_2 := \frac{|x_2 - p|}{|x_1 - p|}.$$

Ejercicio 16. *7 %.*
Ejemplo de función contractiva. Ejemplo de función contractiva. Consideremos la función f definida en el conjunto X mediante la siguiente regla.

$$X := [\pi, 2\pi], \qquad f(x) := \arctan(x) + \pi.$$

I. Demostrar que $f(x) \in X$ para cada x en X.
II. Calcular o acotar de manera apropiada los números $M_1 := \inf_{x \in \operatorname{int}(X)} f'(x)$, $M_2 := \sup_{x \in \operatorname{int}(X)} f'(x)$,

$$M := \sup_{x \in \operatorname{int}(X)} |f'(x)|.$$

III. En algún lenguaje de programación programar el algoritmo de iteración simple (conocido también como el método del punto fijo) y con ese programa calcular p en X tal que $f(p) = p$. Se recomienda empezar con $x_0 = \pi$.
IV. Calcular $x_1 := f(x_0)$, $x_2 := f(x_1)$. Calcular los cocientes

$$q_1 := \frac{|x_1 - p|}{|x_0 - p|}, \qquad q_2 := \frac{|x_2 - p|}{|x_1 - p|}.$$

Ejercicio 17. *5 %.*
Los espacios totalmente acotados. Sea (X, d) un espacio métrico y sean P, Q subespacios métricos de X totalmente acotados. Demostrar que $P \cup Q$ es totalmente acotado.

Ejercicio 18. *5 %.*
Ejemplo de demostración del límite por definición. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := -x^3 + 2x^2 - 5.$$

Demostrar que $\lim_{x \to -2} f(x) = 11$ trabajando directamente con la definición del límite, en el lenguaje de ε y δ.