Engrape aquí
No doble

Análisis Real. Tarea 2. Variante α.

Medida, funciones medibles, funciones simples, varios modos de convergencia.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Se considera la **sucesión monótona de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left[\frac{1}{n}, 4 - \frac{1}{n}\right).$$

I. Calcule la unión $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Halle las diferencias $D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k-1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $A_0 \coloneqq \emptyset$.

III. Verifique directamente las siguientes igualdades (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n), \qquad \mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Demuestre que es **medible** la función de Riemann $f\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente regla:

$$\begin{aligned} f(x) &\coloneqq \frac{1}{q}, && \text{si} \quad x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \{1, 2, 3, \ldots\}, \quad \gcd(p, q) = 1; \\ f(x) &\coloneqq 0, && \text{si} \quad x \in (0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la **función característica** del conjunto $A = \{2, 3\}$. Calcule las **preimágenes** de los siguientes conjuntos bajo la función f:

$$(-2, 3), \quad (-\infty, 1/2], \quad \{0\}, \quad [1/3, 2/3], \quad [1, +\infty).$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Sean $C \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que $\quad \sup(C) \le \gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \alpha \in C \quad \alpha \le \gamma.$

Ejercicio 5. *1 %.*
Sean $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Demuestre que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in X\colon\ (f+g)(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Muestre que la siguiente función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es simple, dibuje su gráfica y encuentre su representación canónica:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\lfloor x\rfloor}{2}\right) + \operatorname{sign}(x+1) + 2\cos(\pi\lfloor x\rfloor).$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de

una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n\colon X \to \mathbb{R}$. Siga el plan:

a) Para todo punto $x \in X$ calcular el límite puntual $g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ calcular $\sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

c) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

d) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$.

e) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

g) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

h) Calcular D como la intersección de los $C(\varepsilon)$.

i) Utilizando el resultado del inciso f) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egóroff*).

j) En el caso de respuesta positiva en i), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 7. *6 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = e^{-n^2x^2}$.

Ejercicio 8. *6 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \chi_{[0,1/n)}$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Real. Tarea 2. Variante 1.

Medida, funciones medibles, funciones simples, varios modos de convergencia.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Se considera la **sucesión monótona de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left[-3, 4 + \frac{1}{n}\right).$$

I. Calcule la intersección $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Halle las diferencias $D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k+1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

III. Verifique directamente las siguientes igualdades (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n), \qquad \mu(A_1) = \mu(B) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n).$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Demuestre que es **medible** la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente regla:

$$\begin{aligned} &f(x) \coloneqq n, && \text{si} \quad x \in \left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right), \quad n \in \{1, 2, 3, \ldots\}; \\ &f(x) \coloneqq 0, && \text{si} \quad x \in (-\infty, -1) \cup [0, +\infty). \end{aligned}$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la **función característica** del conjunto $A = (-4, 2]$. Calcule las **preimágenes** de los siguientes conjuntos bajo la función f:

$$(-\infty, 1/2), \quad \{-5, 1\}, \quad \{0\}, \quad [1, +\infty), \quad (1/2, 7).$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Sean $C \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que $\quad \inf(C) < \gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \alpha \in C \quad \alpha < \gamma.$

Ejercicio 5. *1 %.*
Sean $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Demuestre que $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$, donde $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ está definida mediante la regla:

$$g(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Muestre que la siguiente función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es simple, dibuje su gráfica y encuentre su representación canónica:

$$f(x) = \operatorname{sign}(x-3) + \operatorname{sen} \frac{\pi\lfloor x \rfloor}{2}.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de

una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n\colon X \to \mathbb{R}$. Siga el plan:

a) Para todo punto $x \in X$ calcular el límite puntual $g(x) \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ calcular $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

c) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

d) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$.

e) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

g) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

h) Calcular D como la intersección de los $C(\varepsilon)$.

i) Utilizando el resultado del inciso f) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egóroff*).

j) En el caso de respuesta positiva en i), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 7. *6 %.*
$X = [0, 1]$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq 4^n x^n (1-x)^n$.

Ejercicio 8. *6 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq \chi_{(-n-1,-n]}$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Real. Tarea 2. Variante 2.

Medida, funciones medibles, funciones simples, varios modos de convergencia.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *2 %.*
Se considera la **sucesión monótona de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 5\right).$$

I. Calcule la unión $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Halle las diferencias $D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k-1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $A_0 \coloneqq \emptyset$.

III. Verifique directamente las siguientes igualdades (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n), \qquad \mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 2. *1 %.*
Demuestre que es **medible** la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente regla:

$$\begin{aligned} f(x) &\coloneqq -\frac{1}{n}, && \text{si} \quad x \in (-n-1, -n], \quad n \in \{1, 2, 3, \ldots\}; \\ f(x) &\coloneqq 0, && \text{si} \quad x \in (-1, +\infty). \end{aligned}$$

Ejercicio 3. *1 %.*
Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la **función característica** del conjunto $A = [-1, 7]$. Calcule las **preimágenes** de los siguientes conjuntos bajo la función f:

$$\{-3, 0\}, \quad \{1\}, \quad [-1/2, 1/2), \quad (-1, 8], \quad (1/3, +\infty).$$

Ejercicio 4. *1 %.*
Sean $C \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que $\quad \sup(C) > \gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \alpha \in C \quad \alpha > \gamma.$

Ejercicio 5. *1 %.*
Sean $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Demuestre que $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$, donde $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ está definida mediante la regla:

$$g(x) \coloneqq \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Ejercicio 6. *2 %.*
Muestre que la siguiente función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es simple, dibuje su gráfica y encuentre su representación canónica:

$$f(x) = \cos\bigl(\pi\lfloor x\rfloor\bigr) + 3\,\mathrm{sign}(x+2).$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de

una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n\colon X \to \mathbb{R}$. Siga el plan:

a) Para todo punto $x \in X$ calcular el límite puntual $g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ calcular $\sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

c) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

d) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$.

e) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

g) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

h) Calcular D como la intersección de los $C(\varepsilon)$.

i) Utilizando el resultado del inciso f) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egóroff*).

j) En el caso de respuesta positiva en i), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 7. *6 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq \dfrac{1}{1 + (x-n)^2}$.

Ejercicio 8. *6 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq n \cdot \chi_{[1-1/n,1)} = \begin{cases} n, & x \in [1-1/n, 1), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [1-1/n, 1). \end{cases}$