Engrape aquí
No doble

Análisis Real. Tarea 3. Variante α.

Definición de la integral de Lebesgue, teorema de convergencia monótona, lema de Fatou, teorema de convergencia dominada.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *3 %.*
Se considera el intervalo $X = [0, 5]$ con la medida de Lebesgue μ. Muestre que la siguiente función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es simple y dibuje su gráfica:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \operatorname{sen} \frac{\pi \lfloor x \rfloor}{2}.$$

Calcule

$$\int_X f \, d\mu.$$

Ejercicio 2. *3 %.*
Sean $f, g\colon [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x, \qquad g(x) = \cos(x).$$

Para cada una de las funciones $f, g, f+g$ dibuje su gráfica y calcule las partes positiva y negativa. Determine si $(f+g)_+ = f_+ + g_+$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Se consideran el conjunto $X = \mathbb{R}$, la medida de Lebesgue μ, el conjunto $A = [0, 1]$ y la función

$$f \coloneqq \text{la función característica del conjunto } \mathbb{Q} \cup [2, 3].$$

Calcule:

$$\int_A f \, d\mu, \qquad \mu\big(\{x \in X\colon\ f(x) > 0\}\big), \qquad \mu(A), \qquad \mu\big(\{x \in A\colon\ f(x) > 0\}\big).$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Se consideran el conjunto $X = [-2\pi, 2\pi]$, la medida de Lebesgue μ y la función

$$f \coloneqq \cos(x).$$

Dibuje la gráfica de f, calcule

$$\int_X f \, d\mu$$

y encuentre conjuntos medibles $A, B \subset X$ tales que

$$\int_A f \, d\mu > 0, \qquad \int_B f \, d\mu < 0.$$

Ejercicio 5. *3 %.*
Sea $f \in L^1([3,+\infty),\mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue. Usando el Teorema de Convergencia Dominada y el criterio de Heine para el límite (en términos de sucesiones) demuestre que

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_{[3,b]} f\,d\mu = \int\limits_{[3,+\infty)} f\,d\mu.$$

Ejercicio 6. *3 %.*
Encuentre un espacio de medida $(X,\mathcal{F},\mu)$ y una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad f_n \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},[0,+\infty))$$

y $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} 0$, pero

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \int\limits_X f_n\,d\mu = +\infty.$$

Ejercicio 7. *4 %.*
En el conjunto $X=\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n\colon (0,1] \to [0,+\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) = \begin{cases} n - nx, & 0 < x < \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g=0$. Calcule

$$\int\limits_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\,d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) = \sup_{n\in\{1,2,\ldots\}} |f_n(x)|.$$

Engrape aquí
No doble

Análisis Real. Tarea 3. Variante 1.

Definición de la integral de Lebesgue, teorema de convergencia monótona, lema de Fatou, teorema de convergencia dominada.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *3 %.*
Se considera el intervalo $X = [0, 5]$ con la medida de Lebesgue μ. Muestre que la siguiente función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es simple y dibuje su gráfica:

$$f(x) = \cos\big(\pi\lfloor x\rfloor\big) + 2\lfloor x\rfloor.$$

Calcule

$$\int_X f\,d\mu.$$

Ejercicio 2. *3 %.*
Sean $f, g\colon [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \operatorname{sen}(x), \qquad g(x) = -x.$$

Para cada una de las funciones $f, g, f + g$ dibuje su gráfica y calcule las partes positiva y negativa. Determine si $(f + g)_+ = f_+ + g_+$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Se consideran el conjunto $X = \mathbb{R}$, la medida de Lebesgue μ, el conjunto $A = [0, 1]$ y la función

$$f(x) \coloneqq \big\lfloor |x| \big\rfloor.$$

Calcule:

$$\int_A f\,d\mu, \qquad \mu\big(\{x \in X\colon\ f(x) > 0\}\big), \qquad \mu(A), \qquad \mu\big(\{x \in A\colon\ f(x) > 0\}\big).$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Se consideran el conjunto $X = [-3, 3]$, la medida de Lebesgue μ y la función

$$f \coloneqq 1 - 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor.$$

Dibuje la gráfica de f, calcule

$$\int_X f\,d\mu$$

y encuentre conjuntos medibles $A, B \subset X$ tales que

$$\int_A f\,d\mu > 0, \qquad \int_B f\,d\mu < 0.$$

Ejercicio 5. *3 %.*
Sea $f \in L^1([1,7),\mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue. Usando el Teorema de Convergencia Dominada y el criterio de Heine para el límite (en términos de sucesiones) demuestre que

$$\lim_{b\to 7^-} \int\limits_{[1,b]} f\,d\mu = \int\limits_{[1,7)} f\,d\mu.$$

Ejercicio 6. *3 %.*
Encuentre un espacio de medida $(X,\mathcal{F},\mu)$ y una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},[0,+\infty))$$

y $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} 0$, pero

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int\limits_X f_n\,d\mu = 1.$$

Ejercicio 7. *4 %.*
En el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n\colon (0,1] \to [0,+\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) = n\chi_{(0,1/n]}(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int\limits_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\,d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) = \sup_{n\in\{1,2,\ldots\}} |f_n(x)|.$$

Engrape aquí
No doble

Análisis Real. Tarea 3. Variante 2.

Definición de la integral de Lebesgue, teorema de convergencia monótona, lema de Fatou, teorema de convergencia dominada.

Nombre: Calificación (%):

Esta tarea vale 20 % de la calificación parcial.

Ejercicio 1. *3 %.*
Se considera el intervalo $X = [0, 5]$ con la medida de Lebesgue μ. Muestre que la siguiente función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es simple y dibuje su gráfica:

$$f(x) = \lfloor 6 - |x - 3| \rfloor.$$

Calcule

$$\int\limits_X f\,d\mu.$$

Ejercicio 2. *3 %.*
Sean $f, g\colon [-3, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 - |x|, \qquad g(x) = 2x - 2.$$

Para cada una de las funciones $f, g, f + g$ dibuje su gráfica y calcule las partes positiva y negativa. Determine si $(f + g)_+ = f_+ + g_+$.

Ejercicio 3. *2 %.*
Se consideran el conjunto $X = \mathbb{R}$, la medida de Lebesgue μ, el conjunto $A = [0, 1]$ y la función

$$f := \text{la función característica del conjunto } \mathbb{Q} \cup [4, 5].$$

Calcule:

$$\int\limits_A f\,d\mu, \qquad \mu\big(\{x \in X\colon\ f(x) > 0\}\big), \qquad \mu(A), \qquad \mu\big(\{x \in A\colon\ f(x) > 0\}\big).$$

Ejercicio 4. *2 %.*
Se consideran el conjunto $X = [-2\pi, 2\pi]$, la medida de Lebesgue μ y la función

$$f := \operatorname{arc\,sen}(sen(x)).$$

Dibuje la gráfica de f, calcule

$$\int\limits_X f\,d\mu,$$

y encuentre conjuntos medibles $A, B \subset X$ tales que

$$\int\limits_A f\,d\mu > 0, \qquad \int\limits_B f\,d\mu < 0.$$

Ejercicio 5. *3 %.*
Sea $f \in L^1((-\infty, 4], \mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue. Usando el Teorema de Convergencia Dominada y el criterio de Heine para el límite (en términos de sucesiones) demuestre que

$$\lim_{a \to -\infty} \int_{[a,4]} f \, d\mu = \int_{(-\infty,4]} f \, d\mu.$$

Ejercicio 6. *3 %.*
Encuentre un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y una sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$$

y $f_n(x) \searrow 0$ para todo $x \in X$, pero

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_X f_n \, d\mu = +\infty.$$

Ejercicio 7. *4 %.*
En el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}(x) = \begin{cases} 1, & n \leqslant x < n+1; \\ 0, & x < n \ \vee \ x \geqslant n+1. \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n \to \infty} f_n \right) d\mu \qquad \text{y} \qquad \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$