Análisis Matemático IV.
Tarea "Transformaciones lineales acotadas en espacios normados".
Variante α.

Transformaciones lineales y operaciones con conjuntos de vectores, varias descripciones equivalentes de transformaciones lineales acotadas, varias definiciones equivalentes de la norma de la transformación lineal, normas de matrices, normas de funcionales lineales, ejemplos de funcionales lineales acotados y no acotados, ejemplos de espacios duales, ejemplos de aplicaciones del teorema de Hahn–Banach, ejemplos de análisis de invertibilidad.

Ejercicio 1. *5 %.*
Transformaciones lineales y operaciones con conjuntos de vectores. Sean V, W espacios vectoriales complejos y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Supongamos que $X \subseteq V$, $y \in V$. Demostrar que

$$T[X + y] = T[X] + T(y).$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Transformaciones lineales acotadas, varias descripciones equivalentes. Sean V, W espacios normados, $V \neq \{0_V\}$, y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Denotamos por B_V a la bola unitaria abierta en V:

$$B_V := \big\{x \in V\colon\ \|x\|_V < 1\big\}.$$

Supongamos que la función T es continua en el punto 0_V. Demostrar de manera directa que $T[B_V]$ es un conjunto acotado en W. Este ejercicio es una parte del criterio de transformaciones lineales acotadas.

Ejercicio 3. *5 %.*
Varias fórmulas equivalentes para la norma de una transformación lineal. Sean V, W espacios normados, $V \neq \{0_V\}$, y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Demostrar de manera directa que

$$\sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V\leqslant 1}} \|Tx\|_W = \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|_V=1}} \|Tv\|_W.$$

Ejercicio 4. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma de la transformación lineal asociada a una matriz, cuando los espacios de vectores están dotados de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Sea

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular el número

$$M := \max_{1\leqslant j\leqslant 2} \sum_{k=1}^{3} |A_{j,k}|.$$

II. Demostrar que para cada x en $\mathbb{C}^3$ se cumple la desigualdad

$$\|Ax\|_\infty \leqslant M\,\|x\|_\infty.$$

III. Construir un vector y en $\mathbb{C}^3$ tal que

$$\|y\|_\infty = 1, \qquad \|Ay\|_\infty = M.$$

IV. Definimos $T_A\colon (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $T_A(x) := Ax$. Calcular la norma de T_A.

Ejercicio 5. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma de la transformación lineal asociada a una matriz, cuando los espacios de vectores están dotados de la norma $\|\cdot\|_1$. Sea

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular el número

$$N := \max_{1\leqslant k\leqslant 3} \sum_{j=1}^{2} |A_{j,k}|.$$

II. Demostrar que para cada x en $\mathbb{C}^3$ se cumple la desigualdad

$$\|Ax\|_1 \leqslant N\,\|x\|_1.$$

III. Construir un vector z en $\mathbb{C}^3$ tal que

$$\|z\|_1 = 1, \qquad \|Az\|_1 = N.$$

IV. Definimos $U_A\colon (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_1)$, $U_A(x) := Ax$. Calcular la norma de U_A.

En los siguientes 4 ejercicios (ejercicios 6, 7, 8, 9) se trata de funcionales lineales acotados en un espacio de sucesiones. Se recomienda resolver estos ejercicios en el orden indicado.

Ejercicio 6. *5 %.*
La base de Schauder canónica del espacio de las sucesiones convergentes al cero. Para cada p en $\mathbb{N}$, denotamos por e_p la p-ésima sucesión básica. Demostrar que $(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de $c_0(\mathbb{N})$.

Ejercicio 7. *10 %.*
Funcionales lineales acotados en el espacio de las sucesiones convergentes al cero. Sea $a \in \ell^1(\mathbb{N})$. Definimos $\varphi_a\colon c_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

I. Demostrar que la serie en la definición de φ_a converge de manera absoluta y $|\varphi_a(x)| \leqslant \|a\|_1 \, \|x\|_\infty$.

II. Demostrar que φ_a es un funcional lineal.

III. Dado m en $\mathbb{N}$, calcular $\varphi_a(u_m)$ y $|\varphi_a(u_m)|$, donde

$$u_m := \Big(\overline{\operatorname{sign}(a_1)}, \ldots, \overline{\operatorname{sign}(a_m)}, 0, 0, \ldots\Big).$$

IV. Demostrar que $\|\varphi_a\| = \|a\|_1$.

Ejercicio 8. *10 %.*
La forma general de los funcionales lineales acotados en el espacio de las sucesiones convergentes al cero. Sea $\psi\colon c_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ un funcional lineal acotado. Construir a en $\ell^1(\mathbb{N})$ tal que $\psi = \varphi_a$, donde φ_a está definido en el ejercicio anterior. Notemos las etapas importantes de la solución.

I. Definir a.

II. Demostrar que $a \in \ell^1(\mathbb{N})$. Esta es la parte más interesante del ejercicio. Se recomienda utilizar la desigualdad

$$|\psi(u_m)\| \leqslant \|\psi\| \, \|u_m\|_\infty,$$

donde u_m se define como en el ejercicio anterior.

III. Demostrar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$ para cada x en $c_0(\mathbb{N})$. Se recomienda usar la base de Schauder canónica de $c_0(\mathbb{N})$ y el hecho que los funcionales lineales acotados convierten series convergentes en series convergentes.

Ejercicio 9. *5 %.*
Ejemplo de funcional lineal acotado en el espacio de las sucesiones convergentes al cero. Definimos $\eta\colon c_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$,

$$\eta(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{2^j},$$

esto es,

$$\eta(x) = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{8} + \cdots .$$

I. Encontrar a en $\ell^1(\mathbb{N})$ tal que $\eta = \varphi_a$, donde φ_a está definido en los ejercicios anteriores.

II. Calcular $\|\eta\|$ usando los resultados de los ejercicios anteriores.

Ejercicio 10. *8 %.*
Ejemplo de funcional lineal no acotado. Denotemos por $\mathcal{P}([0,3])$ al espacio normado complejo de las funciones polinomiales definidas en $[0,3]$, con la norma-supremo. Definimos $\rho\colon \mathcal{P}([0,3]) \to \mathbb{C}$,

$$\rho(x) := x(0) + 5x'(2).$$

I. Mostrar que ρ es lineal.

II. Construir una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \in \mathcal{P}([0,3])$ para cada n en $\mathbb{N}$, $\|y_n\|_{\sup} > 0$ para cada n en $\mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\rho(y_n)|}{\|y_n\|_{\sup}} = +\infty.$$

III. Demostrar que ρ no es acotado.

Ejercicio 11. *8 %.*
Ejemplo de aplicación del teorema de Hahn–Banach: existencia del funcional lineal acotado que "aprecia bien" el vector dado. Sea V un espacio normado complejo y sea $a \in V$, $a \neq 0_V$. Demostrar que existe f en V^* tal que $\|f\| = 1$ y $f(a) = \|a\|$.

En los siguientes 3 ejercicios (ejercicios 12, 13, 14) se trata de un operador lineal acotado en un espacio de sucesiones.

Ejercicio 12. *10 %.*
El operador de multiplicación en $\ell^p(\mathbb{N})$. Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ y sea $1 \leqslant p < +\infty$.

I. Demostrar que si $x \in \ell^p(\mathbb{N})$, entonces $ax \in \ell^p(\mathbb{N})$ y

$$\|ax\|_p \leqslant \|a\|_\infty \, \|x\|_p.$$

II. Definimos $M_a\colon \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$,

$$M_a(x) := ax,$$

esto es,

$$M_a(x) = \Big(a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \ldots\Big).$$

También podemos explicar la regla de correspondencia en forma de tabla.

k	1	2	3	4
x_k	x_1	x_2	x_3	x_4
$(M_ax)_k$	a_1x_1	a_2x_2	a_3x_3	a_4x_4

Mostrar que $M_a \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ y

$$\|M_a\| \leqslant \|a\|_\infty.$$

III. Para cada m en $\mathbb{N}$, calcular Me_m, donde $e_m = \big(\delta_{m,k}\big)_{k\in\mathbb{N}}$.

IV. Demostrar que $\|M_a\| = \|a\|_\infty$.

Ejercicio 13. *10 %.*
Invertibilidad del operador de multiplicación en $\ell^p(\mathbb{N})$. Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ y sea $1 \leqslant p < +\infty$. Seguimos trabajando con el operador M_a del ejercicio anterior.

I. Demostrar que $0 \notin \mathrm{cl}(a[\mathbb{N}])$ si, y solo si,

$$\exists \eta > 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad |a_k| \geqslant \eta.$$

II. Demostrar que si $0 \notin \mathrm{cl}(a[\mathbb{N}])$, entonces $1/a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ y

$$M_a M_{1/a} = M_{1/a} M_a = I.$$

III. Demostrar que si M_a es invertible, entonces $\|M_a e_m\|_p \geqslant \|M_a^{-1}\|^{-1}$ para cada m en $\mathbb{N}$.

VI. Demostrar que si M_a es invertible, entonces $0 \notin \mathrm{cl}(a[\mathbb{N}])$.

V. Usando los resultados de los incisos anteriores, enunciar el criterio de invertibilidad de M_a.

Ejercicio 14. *10 %.*
El espectro del operador de multiplicación en $\ell^p(\mathbb{N})$. Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ y sea $1 \leqslant p < +\infty$. Seguimos trabajando con el operador M_a del ejercicio anterior.

I. Dado λ en $\mathbb{C}$, demostrar que $\lambda I - M_a = M_{\lambda 1_{\mathbb{N}} - a}$, donde $1_{\mathbb{N}}$ es la sucesión constante 1.

II. Hallar el espectro de M_a.

Análisis Matemático IV.
Tarea "Transformaciones lineales acotadas en espacios normados".
Variante 0.

Transformaciones lineales y operaciones con conjuntos de vectores, varias descripciones equivalentes de transformaciones lineales acotadas, varias definiciones equivalentes de la norma de la transformación lineal, normas de matrices, normas de funcionales lineales, ejemplos de funcionales lineales acotados y no acotados, ejemplos de espacios duales, ejemplos de aplicaciones del teorema de Hahn–Banach, ejemplos de análisis de invertibilidad.

Ejercicio 1. *5 %.*
Transformaciones lineales y operaciones con conjuntos de vectores. Sean V, W espacios vectoriales complejos y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $X \subseteq V$. Demostrar que

$$T[\lambda X] = \lambda\, T[X].$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Transformaciones lineales acotadas, varias descripciones equivalentes. Sean V, W espacios normados, $V \neq \{0_V\}$, y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Denotamos de la siguiente manera a las bolas unitarias abierta y cerrada en V:

$$B_V := \big\{v \in V\colon\ \|v\| < 1\big\}, \qquad X_V := \big\{v \in V\colon\ \|v\|_V \leqslant 1\big\}.$$

Supongamos que $T[B_V]$ es un conjunto acotado en W. Demostrar de manera directa que $T[X_V]$ es un conjunto acotado en W. Este ejercicio es una parte del criterio de transformaciones lineales acotadas.

Ejercicio 3. *5 %.*
Varias fórmulas equivalentes para la norma de una transformación lineal. Sean V, W espacios normados, $V \neq \{0_V\}$, y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Demostrar de manera directa que

$$\sup_{\substack{x\in V\\ x\neq 0_V}} \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\substack{v\in V\\ |v\|_V\leqslant 1}} \|Tv\|_W.$$

Ejercicio 4. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma de la transformación lineal asociada a una matriz, cuando los espacios de vectores están dotados de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Sea

$$A := \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular el número

$$M := \max_{1\leqslant j\leqslant 2} \sum_{k=1}^{3} |A_{j,k}|.$$

II. Demostrar que para cada x en $\mathbb{C}^3$ se cumple la desigualdad

$$\|Ax\|_\infty \leqslant M\,\|x\|_\infty.$$

III. Construir un vector y en $\mathbb{C}^3$ tal que

$$\|y\|_\infty = 1, \qquad \|Ay\|_\infty = M.$$

IV. Definimos $T_A\colon (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $T_A(x) := Ax$. Calcular la norma de T_A.

Ejercicio 5. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma de la transformación lineal asociada a una matriz, cuando los espacios de vectores están dotados de la norma $\|\cdot\|_1$. Sea

$$A := \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular el número

$$N := \max_{1\leqslant k\leqslant 3} \sum_{j=1}^{2} |A_{j,k}|.$$

II. Demostrar que para cada x en $\mathbb{C}^3$ se cumple la desigualdad

$$\|Ax\|_1 \leqslant N\,\|x\|_1.$$

III. Construir un vector z en $\mathbb{C}^3$ tal que

$$\|z\|_1 = 1, \qquad \|Az\|_1 = N.$$

IV. Definimos $U_A\colon (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_1)$, $U_A(x) := Ax$. Calcular la norma de U_A.

En los siguientes 4 ejercicios (ejercicios 6, 7, 8, 9) se trata de funcionales lineales acotados en un espacio de sucesiones. Se recomienda resolver estos ejercicios en el orden indicado.

Ejercicio 6. *5 %.*
La base de Schauder canónica del espacio de las sucesiones de soporte finito con la norma-supremo. Denotamos por $c_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ al espacio de las sucesiones de soporte finito, dotado de la norma-supremo (en realidad, el supremo se alcanza):

$$c_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}) := \Big\{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}:\quad \big\{k \in \mathbb{N}:\ x_k \neq 0\big\} \text{ es finito}\Big\},\qquad \|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|.$$

Usando el criterio de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, mostrar que

$$c_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}) = \Big\{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}:\quad \exists m \in \mathbb{N}\quad \forall k > m\quad x_k = 0\Big\}.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$, denotamos por e_p la p-ésima sucesión básica. Demostrar que $(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de $c_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$. Más aún, mostrar que cada elemento de $c_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ es una combinación lineal finita de sucesiones básicas.

Ejercicio 7. *10 %.*
Funcionales lineales acotados en el espacio de las sucesiones de soporte finito con la norma-supremo. Sea $a \in \ell^1(\mathbb{N})$. Definimos $\varphi_a\colon c_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

I. Demostrar que la serie en la definición de φ_a converge de manera absoluta y $|\varphi_a(x)| \leqslant \|a\|_1\,\|x\|_\infty$.

II. Demostrar que φ_a es un funcional lineal.

III. Dado m en $\mathbb{N}$, calcular $\varphi_a(u_m)$ y $|\varphi_a(u_m)|$, donde

$$u_m := \Big(\overline{\operatorname{sign}(a_1)}, \ldots, \overline{\operatorname{sign}(a_m)}, 0, 0, \ldots\Big).$$

IV. Demostrar que $\|\varphi_a\| = \|a\|_1$.

Ejercicio 8. *10 %.*
La forma general de los funcionales lineales acotados en el espacio de las sucesiones de soporte finito con la norma-supremo. Sea $\psi\colon c_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ un funcional lineal acotado. Construir a en $\ell^1(\mathbb{N})$ tal que $\psi = \varphi_a$, donde φ_a está definido en el ejercicio anterior. Notemos las etapas importantes de la solución.

I. Definir a_p para cada p en $\mathbb{N}$.

II. Demostrar que $a \in \ell^1(\mathbb{N})$. Esta es la parte más interesante del ejercicio. Se recomienda utilizar la desigualdad

$$|\psi(u_m)\| \leqslant \|\psi\|\,\|u_m\|_\infty,$$

donde u_m se define como en el ejercicio anterior.

III. Demostrar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$ para cada x en $c_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$. Se recomienda representar x como cierta combinación lineal (finita) de las sucesiones básicas.

Ejercicio 9. *5 %.*
Ejemplo de funcional lineal acotado en el espacio de las sucesiones de soporte finito con la norma-supremo. Definimos $\eta\colon c_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$,

$$\eta(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{2j}}{(j+2)(j+3)},$$

esto es,

$$\eta(x) = \frac{x_2}{12} + \frac{x_4}{20} + \frac{x_6}{30} + \cdots .$$

I. Encontrar a en $\ell^1(\mathbb{N})$ tal que $\eta = \varphi_a$, donde φ_a está definido en los ejercicios anteriores.

II. Calcular $\|\eta\|$ usando los resultados de los ejercicios anteriores.

Ejercicio 10. *8 %.*
Ejemplo de funcional lineal no acotado. Definimos $\rho\colon c_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$,

$$\rho(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k.$$

I. Explicar por qué la suma en la definición de ρ tiene sentido.

II. Mostrar que ρ es lineal.

III. Construir una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \in c_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ para cada n en $\mathbb{N}$, $\|y_n\|_\infty > 0$ para cada n en $\mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\rho(y_n)|}{\|y_n\|_\infty} = +\infty.$$

IV. Demostrar que ρ no es acotado.

Ejercicio 11. *8 %.*
Ejemplo de aplicación del teorema de Hahn–Banach: la existencia de un "sistema dual" para un sistema finito de vectores linealmente independientes. Sea V un espacio normado complejo, sea $m \in \mathbb{N}$ y sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ tales que la lista $(a_1, \ldots, a_m)$ es linealmente independiente. Demostrar que existen $f_1, \ldots, f_m \in V^*$ tales que

$$\forall j, k \in \{1, \ldots, m\} \qquad f_j(a_k) = \delta_{j,k}.$$

En los siguientes 3 ejercicios (ejercicios 12, 13, 14) se trata de un operador lineal acotado en un espacio de sucesiones.

Ejercicio 12. *10 %.*
El operador de desplazamiento a la izquierda en $\ell^p(\mathbb{N})$. Sea $1 \leqslant p < +\infty$. Definimos $L\colon \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$,

$$(Lx)_k := x_{k+1}.$$

I. Para entender mejor la definición de Lx, calcular las primeras cuatro componentes de la sucesión Lx:

$$(Lx)_1, \qquad (Lx)_2, \qquad (Lx)_3, \qquad (Lx)_4.$$

Después de esto, escribir la respuesta en forma breve:

$$Lx = \Big(\,?,\ ?,\ ?,\ ?,\ \ldots\Big).$$

También escribir la respuesta como la siguiente tabla.

k	1	2	3	4
x_k	x_1	x_2	x_3	x_4
$(Lx)_k$	?	?	?	?

II. Sea $x \in \ell^p(\mathbb{N})$. Demostrar que $Lx \in \ell^p(\mathbb{N})$ y $\|Lx\|_p \leqslant \|x\|_p$. En particular, este cálculo justifica que la definición del operador L es consistente.

III. Demostrar que L es un operador lineal.

IV. Demostrar que L es un operador lineal acotado y que $\|L\| \leqslant 1$.

V. Sea $m \in \mathbb{N}$. Calcular Le_m, donde $e_m = \left(\delta_{m,k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Indicación: es obligatorio usar la definición formal de L. Puede ser útil considerar varios casos posibles.

VI. Demostrar que $\|L\| = 1$.

Ejercicio 13. *10 %.*
Invertibilidad del operador de desplazamiento a la izquierda en $\ell^p(\mathbb{N})$. Sea $1 \leqslant p < +\infty$. Seguimos trabajando con el operador $L\colon \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ del ejercicio anterior.

I. Encontrar v en $\ell^p(\mathbb{N})$ tal que

$$v \neq 0_{\ell^p(\mathbb{N})}, \qquad Lv = 0_{\ell^p(\mathbb{N})}.$$

II. Dado y en $\ell^p(\mathbb{N})$, construir x en $\ell^p(\mathbb{N})$ tal que $Lx = y$.

III. Construir $U \in \mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{N}))$ tal que $LU = I$.

IV. Hacer conclusiones sobre la invertibilidad de L: ¿es invertible por la izquierda? ¿es invertible por la derecha? ¿es invertible?

Ejercicio 14. *10 %.*
El espectro del operador de desplazamiento a la izquierda en $\ell^p(\mathbb{N})$. Sea $1 \leqslant p < +\infty$. Seguimos trabajando con el operador $L\colon \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ del ejercicio anterior.

I. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > 1$. Demostrar que el operador $\lambda I - L$ es invertible. Se recomienda usar el resultado sobre la serie de Neumann.

II. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < 1$. Encontrar v en $\ell^p(\mathbb{N})$ tal que

$$v \neq 0_{\ell^p(\mathbb{N})}, \qquad Lv = \lambda v.$$

Se recomienda escribir la ecuación $Lv = \lambda v$ como un sistema infinito de ecuaciones:

$$(Lv)_k = (\lambda v)_k \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

simplificar el lado izquierdo y el lado derecho, y encontrar una solución no nula de este sistema de ecuaciones.

III. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < 1$. Usando el resultado del inciso II explicar que el operador $\lambda I - L$ no es inyectivo.

IV. Encontrar el espectro de L.

Análisis Matemático IV.
Tarea "Transformaciones lineales acotadas en espacios normados".
Variante 1.

Transformaciones lineales y operaciones con conjuntos de vectores, varias descripciones equivalentes de transformaciones lineales acotadas, varias definiciones equivalentes de la norma de la transformación lineal, normas de matrices, normas de funcionales lineales, ejemplos de funcionales lineales acotados y no acotados, ejemplos de espacios duales, ejemplos de aplicaciones del teorema de Hahn–Banach, ejemplos de análisis de invertibilidad.

Ejercicio 1. *5 %.*
Transformaciones lineales y operaciones con conjuntos de vectores. Sean V, W espacios vectoriales complejos y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Sean $X, Y \subseteq V$. Demostrar que

$$T[X + Y] = T[X] + T[Y].$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Transformaciones lineales acotadas, varias descripciones equivalentes. Sean V, W espacios normados, $V \neq \{0_V\}$, y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Supongamos que $a \in V$ y la función T es continua en el punto a. Demostrar que T es continua en el punto 0_V.

Ejercicio 3. *5 %.*
Varias fórmulas equivalentes para la norma de una transformación lineal. Sean V, W espacios normados, $V \neq \{0_V\}$, y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Demostrar de manera directa que el número

$$\sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leqslant 1}} \|Tx\|_W$$

es el elemento mínimo del conjunto

$$U := \big\{C \in [0, +\infty]\colon \quad \forall v \in V \quad \|Tv\|_W \leqslant C\,\|v\|_V\big\}.$$

Ejercicio 4. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma de la transformación lineal asociada a una matriz, cuando los espacios de vectores están dotados de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Sea

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular el número

$$M := \max_{1\leqslant j\leqslant 2} \sum_{k=1}^{3} |A_{j,k}|.$$

II. Demostrar que para cada x en $\mathbb{C}^3$ se cumple la desigualdad

$$\|Ax\|_\infty \leqslant M\,\|x\|_\infty.$$

III. Construir un vector y en $\mathbb{C}^3$ tal que

$$\|y\|_\infty = 1, \qquad \|Ay\|_\infty = M.$$

IV. Definimos $T_A\colon (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $T_A(x) := Ax$. Calcular la norma de T_A.

Ejercicio 5. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma de la transformación lineal asociada a una matriz, cuando los espacios de vectores están dotados de la norma $\|\cdot\|_1$. Sea

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular el número

$$N := \max_{1\leqslant k\leqslant 3} \sum_{j=1}^{2} |A_{j,k}|.$$

II. Demostrar que para cada x en $\mathbb{C}^3$ se cumple la desigualdad

$$\|Ax\|_1 \leqslant N\,\|x\|_1.$$

III. Construir un vector z en $\mathbb{C}^3$ tal que

$$\|z\|_1 = 1, \qquad \|Az\|_1 = N.$$

IV. Definimos $U_A\colon (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_1)$, $U_A(x) := Ax$. Calcular la norma de U_A.

En los siguientes 4 ejercicios (ejercicios 6, 7, 8, 9) se trata de funcionales lineales acotados en un espacio de sucesiones. Se recomienda resolver estos ejercicios en el orden indicado.

Ejercicio 6. *5 %.*
La base de Schauder canónica del espacio de las sucesiones cuadrado sumables. Para cada p en $\mathbb{N}$, denotamos por e_p la p-ésima sucesión básica. Demostrar que $(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Ejercicio 7. *10 %.*
Funcionales lineales acotados en el espacio de las sucesiones cuadrado sumables. Sea $a \in \ell^2(\mathbb{N})$. Definimos $\varphi_a \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

I. Demostrar que la serie en la definición de φ_a converge de manera absoluta y que $|\varphi_a(x)| \leqslant \|a\|_2 \, \|x\|_2$.

II. Demostrar que φ_a es un funcional lineal.

III. Dado m en $\mathbb{N}$, calcular $\|u_m\|_2$, $\varphi_a(u_m)$ y $|\varphi_a(u_m)|$, donde

$$u_m := \Big(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}, 0, 0, \ldots\Big).$$

IV. Demostrar que $\|\varphi_a\| = \|a\|_2$.

Ejercicio 8. *10 %.*
La forma general de los funcionales lineales acotados en el espacio de las sucesiones cuadrado sumables. Sea $\psi \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ un funcional lineal acotado. Construir a en $\ell^2(\mathbb{N})$ tal que $\psi = \varphi_a$, donde φ_a está definido en el ejercicio anterior. Notemos las etapas importantes de la solución.

I. Definir a_p para cada p en $\mathbb{N}$.

II. Demostrar que $a \in \ell^2(\mathbb{N})$. Es la parte más interesante de este ejercicio. Se recomienda utilizar la desigualdad

$$|\psi(u_m)\| \leqslant \|\psi\| \, \|u_m\|_2,$$

donde u_m se define como en el ejercicio anterior.

III. Demostrar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$ para cada x en $\ell^2(\mathbb{N})$. Usar la base de Schauder canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$ y el hecho que los funcionales lineales acotados convierten series convergentes en series convergentes.

Observación. El teorema de Riesz–Fréchet también da una descripción del espacio dual de $\ell^2(\mathbb{N})$, pero en la solución de este ejercicio se propone **no** usar el teorema de Riesz–Fréchet.

Ejercicio 9. *5 %.*
Ejemplo de funcional lineal acotado en el espacio de las sucesiones cuadrado sumables. Definimos $\eta \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$,

$$\eta(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j},$$

esto es,

$$\eta(x) = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{9} + \frac{x_3}{27} + \cdots .$$

I. Encontrar a en $\ell^2(\mathbb{N})$ tal que $\eta = \varphi_a$, donde φ_a está definido en los ejercicios anteriores.

II. Calcular $\|\eta\|$ usando los resultados de los ejercicios anteriores.

Ejercicio 10. *8 %.*
Ejemplo de funcional lineal no acotado. Denotemos por V al espacio normado complejo de las funciones infinitamente suaves $[0, 5] \to \mathbb{C}$, con la norma

$$\|x\|_V := \left(\int_0^5 |x(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Definimos $\rho \colon V \to \mathbb{C}$,

$$\rho(x) := x''(3).$$

I. Mostrar que ρ es lineal.

II. Construir una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $y_n \in V$ para cada n en $\mathbb{N}$, $\|y_n\|_V > 0$ para cada n en $\mathbb{N}$ y

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\rho(y_n)|}{\|y_n\|_V} = +\infty.$$

III. Demostrar que ρ no es acotado.

Ejercicio 11. *8 %.*
Hiperplanos y funcionales lineales. Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un hipersubespacio de V. En otras palabras, estamos suponiendo que $a \in V \setminus W$ y $V = W + \mathbb{C}a$. Demostrar que existe un funcional lineal no nulo $f \colon V \to \mathbb{C}$ tal que $\ker(f) = W$. Se recomienda el siguiente plan de solución.

I. Mostrar que para cada elemento v de V existe un único par (w, λ) en $W \times \mathbb{C}$ tal que $v = w + \lambda a$.

II. Definir $f \colon V \to \mathbb{C}$ de manera apropiada.

III. Demostrar que f es un funcional lineal.

IV. Calcular $f(a)$. Mostrar que f es no nulo.

V. Demostrar que $\ker(f) = W$.

En los siguientes 3 ejercicios (ejercicios 12, 13, 14) se trata de un operador lineal acotado en un espacio de sucesiones.

Ejercicio 12. *10 %.*
El operador de desplazamiento a la derecha en $\ell^p(\mathbb{N})$. Sea $1 \leqslant p < +\infty$. Definimos $R \colon \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$,

$$(Rx)_k := \begin{cases} 0, & k = 1; \\ x_{k-1}, & k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2. \end{cases}$$

I. Para entender mejor la definición de Rx, calcular las primeras cuatro componentes de la sucesión Rx:

$$(Rx)_1, \qquad (Rx)_2, \qquad (Rx)_3, \qquad (Rx)_4.$$

Después de esto, escribir la respuesta en forma breve:

$$Rx = \Big(?,\ ?,\ ?,\ ?,\ \ldots \Big).$$

También escribir la respuesta como la siguiente tabla.

k	1	2	3	4
x_k	x_1	x_2	x_3	x_4
$(Rx)_k$	?	?	?	?

II. Sea $x \in \ell^p(\mathbb{N})$. Demostrar que $Rx \in \ell^p(\mathbb{N})$ y $\|Rx\|_p = \|x\|_p$. En particular, este cálculo justifica que la definición del operador R es consistente.

III. Demostrar que R es un operador lineal.

IV. Demostrar que R es un operador lineal acotado y que $\|R\| = 1$.

V. Sea $m \in \mathbb{N}$. Calcular Re_m, donde $e_m = \left(\delta_{m,k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Indicación: es obligatorio usar la definición formal de R.

Ejercicio 13. *10 %.*
Invertibilidad del operador de desplazamiento a la derecha en $\ell^p(\mathbb{N})$. Sea $1 \leqslant p < +\infty$. Seguimos trabajando con el operador $R\colon \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ del ejercicio anterior.

I. Demostrar que R es inyectivo usando su propiedad isométrica. Encontrar $\ker(R)$.

II. Construir $U \in \mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{N}))$ tal que $UR = I$.

III. Sea $y \in \ell^p(\mathbb{N})$ tal que $y_1 \neq 0$. Demostrar que no existe x en $\ell^p(\mathbb{N})$ tal que

$$Rx = y.$$

IV. Supongamos que $y \in \ell^p(\mathbb{N})$ tal que $y_1 = 0$. Demostrar que existe x en $\ell^p(\mathbb{N})$ tal que

$$Rx = y.$$

V. Encontrar la imagen de R.

VI. Hacer conclusiones sobre la invertibilidad de R: ¿es invertible por la izquierda? ¿es invertible por la derecha? ¿es invertible?

Ejercicio 14. *10 %.*
El espectro del operador de desplazamiento a la derecha en $\ell^p(\mathbb{N})$. Sea $1 \leqslant p < +\infty$. Seguimos trabajando con el operador $R\colon \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ del ejercicio anterior.

I. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > 1$. Demostrar que el operador $\lambda I - L$ es invertible. Se recomienda usar el resultado sobre la serie de Neumann.

II. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < 1$. Demostrar que la ecuación $(\lambda I - R)x = e_1$ no tiene solución en $\ell^p(\mathbb{N})$. Se recomienda escribir la ecuación $Rx = e_1$ como un sistema infinito de ecuaciones:

$$(\lambda x - Rx)_k = (e_1)_k \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

simplificar el lado izquierdo y el lado derecho, mostrar que este sistema de ecuaciones tiene una única solución $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, pero la solución x no pertenece al espacio $\ell^p(\mathbb{N})$.

III. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < 1$. Usando el resultado del inciso II explicar que el operador $\lambda I - R$ no es suprayectivo.

IV. Encontrar el espectro de R.

Análisis Matemático IV.
Tarea “Transformaciones lineales acotadas en espacios normados”.
Variante 2.

Transformaciones lineales y operaciones con conjuntos de vectores, varias descripciones equivalentes de transformaciones lineales acotadas, varias definiciones equivalentes de la norma de la transformación lineal, normas de matrices, normas de funcionales lineales, ejemplos de funcionales lineales acotados y no acotados, ejemplos de espacios duales, ejemplos de aplicaciones del teorema de Hahn–Banach, ejemplos de análisis de invertibilidad.

Ejercicio 1. *5 %.*
Transformaciones lineales y operaciones con conjuntos de vectores. Sean V, W espacios vectoriales complejos y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Sean $X, Y \subseteq V$. Recordar la definición del conjunto $X - Y$ (el conjunto de las diferencias), no confundirlo con $X \backslash Y$. Demostrar de manera directa que

$$T[X - Y] = T[X] - T[Y].$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Transformaciones lineales acotadas, varias descripciones equivalentes. Sean V, W espacios normados, $V \neq \{0_V\}$, y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal acotada, es decir, existe $C \geqslant 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leqslant C\,\|x\|_V.$$

Demostrar que para cada conjunto $A \subseteq V$, acotado en V, el conjunto $T[A]$ es acotado en W.

Ejercicio 3. *5 %.*
Varias fórmulas equivalentes para la norma de una transformación lineal. Sean V, W espacios normados, $V \neq \{0_V\}$, y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Demostrar de manera directa que el número

$$\sup_{\substack{x \in V\\ x \neq 0_V}} \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V}$$

es el elemento mínimo del conjunto

$$U := \big\{ C \in [0, +\infty] \colon \quad \forall v \in V \quad \|Tv\|_W \leqslant C\,\|v\|_V \big\}.$$

Ejercicio 4. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma de la transformación lineal asociada a una matriz, cuando los espacios de vectores están dotados de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Sea

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular el número

$$M := \max_{1\leqslant j\leqslant 2} \sum_{k=1}^{3} |A_{j,k}|.$$

II. Demostrar que para cada x en $\mathbb{C}^3$ se cumple la desigualdad

$$\|Ax\|_\infty \leqslant M\,\|x\|_\infty.$$

III. Construir un vector y en $\mathbb{C}^3$ tal que

$$\|y\|_\infty = 1, \qquad \|Ay\|_\infty = M.$$

IV. Definimos $T_A\colon (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $T_A(x) := Ax$. Calcular la norma de T_A.

Ejercicio 5. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma de la transformación lineal asociada a una matriz, cuando los espacios de vectores están dotados de la norma $\|\cdot\|_1$. Sea

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular el número

$$N := \max_{1\leqslant k\leqslant 3} \sum_{j=1}^{2} |A_{j,k}|.$$

II. Demostrar que para cada x en $\mathbb{C}^3$ se cumple la desigualdad

$$\|Ax\|_1 \leqslant N\,\|x\|_1.$$

III. Construir un vector z en $\mathbb{C}^3$ tal que

$$\|z\|_1 = 1, \qquad \|Az\|_1 = N.$$

IV. Definimos $U_A\colon (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_1)$, $U_A(x) := Ax$. Calcular la norma de U_A.

En los siguientes 4 ejercicios (ejercicios 6, 7, 8, 9) se trata de funcionales lineales acotados en un espacio de sucesiones. Se recomienda resolver estos ejercicios en el orden indicado.

Ejercicio 6. *5 %.*
La base de Schauder canónica del espacio de las sucesiones absolutamente sumables. Para cada p en $\mathbb{N}$, denotamos por e_p la p-ésima sucesión básica. Demostrar que $(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de $\ell^1(\mathbb{N})$.

Ejercicio 7. *10 %.*
Funcionales lineales acotados en el espacio de las sucesiones absolutamente sumables. Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Definimos $\varphi_a\colon \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

I. Demostrar que la serie en la definición de φ_a converge de manera absoluta y que $|\varphi_a(x)| \leqslant \|a\|_\infty \|x\|_1$.

II. Demostrar que φ_a es un funcional lineal.

III. Dado m en $\mathbb{N}$, calcular $\|e_m\|_1$, $\varphi_a(e_m)$ y $|\varphi_a(e_m)|$, donde $e_m = \big(\delta_{m,k}\big)_{k\in\mathbb{N}}$.

IV. Demostrar que $\|\varphi_a\| = \|a\|_\infty$.

Ejercicio 8. *10 %.*
La forma general de los funcionales lineales acotados en el espacio de las sucesiones absolutamente sumables. Sea $\psi\colon \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ un funcional lineal acotado. Construir a en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ tal que $\psi = \varphi_a$, donde φ_a está definido en el ejercicio anterior. Notemos las etapas importantes de la solución.

I. Definir a_p para cada p en $\mathbb{N}$.

II. Demostrar que $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Es la parte más interesante de este ejercicio. Se recomienda utilizar la desigualdad

$$|\psi(e_m)\| \leqslant \|\psi\| \, \|e_m\|_1.$$

III. Demostrar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$ para cada x en $\ell^1(\mathbb{N})$. Se recomienda usar la base de Schauder canónica de $\ell^1(\mathbb{N})$ y el hecho que los funcionales lineales acotados convierten series convergentes en series convergentes.

Ejercicio 9. *5 %.*
Ejemplo de funcional lineal acotado en el espacio de las sucesiones absolutamente sumables. Definimos $\eta\colon \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$,

$$\eta(x) := \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j x_{3j-1},$$

esto es,

$$\eta(x) = -x_2 + x_5 - x_8 + \cdots .$$

I. Encontrar a en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ tal que $\eta = \varphi_a$, donde φ_a está definido en los ejercicios anteriores.

II. Calcular $\|\eta\|$ usando los resultados de los ejercicios anteriores.

Ejercicio 10. *8 %.*
Ejemplo de funcional lineal no acotado. Denotemos por E al espacio normado complejo de las funciones infinitamente suaves $[1,4] \to \mathbb{C}$, con la norma

$$\|x\|_E := \left(\int_1^4 |x(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Definimos $\rho \colon V \to \mathbb{C}$,

$$\rho(x) := \int_1^4 x'(t) \, dt.$$

I. Mostrar que ρ es lineal.

II. Construir una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $y_n \in E$ para cada n en $\mathbb{N}$, $\|y_n\|_E > 0$ para cada n en $\mathbb{N}$ y

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\rho(y_n)|}{\|y_n\|_E} = +\infty.$$

III. Demostrar que ρ no es acotado.

Ejercicio 11. *8 %.*
Ejemplo de aplicación del teorema de Hahn–Banach: el encaje canónico al espacio bidual. Sea V un espacio normado complejo. Denotamos por V^{**} el espacio dual del espacio V^*:

$$V^{**} := \mathcal{B}(\mathcal{B}(V, \mathbb{C}), \mathbb{C}).$$

Definimos $\Psi \colon V \to V^{**}$,

$$\Psi(a)(f) := f(a) \qquad (a \in V, \quad f \in V^*).$$

Demostrar que para cada a en V se cumple la igualdad

$$\|\Psi(a)\| = \|a\|.$$

En los siguientes 3 ejercicios (ejercicios 12, 13, 14) se trata de un operador lineal acotado en un espacio de sucesiones.

Ejercicio 12. *10 %.*
El operador de desplazamiento a la izquierda en $\ell^p(\mathbb{Z})$. Sea $1 \leqslant p < +\infty$. Definimos $L \colon \ell^p(\mathbb{Z}) \to \ell^p(\mathbb{Z})$,

$$(Lx)_k := x_{k+1}.$$

I. Para entender mejor la definición de Lx, calcular las siguientes componentes de la sucesión Lx:

$$(Lx)_{-2}, \qquad (Lx)_{-1}, \qquad (Lx)_0, \qquad (Lx)_1, \qquad (Lx)_2.$$

Después de esto, escribir la respuesta en forma breve:

$$Lx = \Big(\ldots,\ ?,\ ?,\ \underbrace{\ ?\ }_{\text{posición } 0},\ ?,\ ?,\ \ldots\Big).$$

También escribir la respuesta como la siguiente tabla.

k	-2	-1	0	1	2
x_k	x_{-2}	x_{-1}	x_0	x_1	x_2
$(Lx)_k$	?	?	?	?	?

II. Sea $x \in \ell^p(\mathbb{Z})$. Demostrar que $Lx \in \ell^p(\mathbb{Z})$ y $\|Lx\|_p = \|x\|_p$. En particular, este cálculo justifica que la definición del operador L es consistente.

III. Demostrar que L es un operador lineal.

IV. Demostrar que L es un operador lineal acotado y $\|L\| = 1$.

V. Sea $m \in \mathbb{N}$. Calcular Le_m, donde $e_m = \left(\delta_{m,k}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$. Indicación: es obligatorio usar la definición formal de L.

Ejercicio 13. *10 %.*
Invertibilidad del operador de desplazamiento a la izquierda en $\ell^p(\mathbb{Z})$. Sea $1 \leqslant p < +\infty$. Seguimos trabajando con el operador $L\colon \ell^p(\mathbb{Z}) \to \ell^p(\mathbb{Z})$ del ejercicio anterior.

I. Calcular $\ker(L)$. Determinar si L es inyectivo.

II. Sea $y \in \ell^p(\mathbb{Z})$. Encontrar x en $\ell^p(\mathbb{Z})$ tal que $Lx = y$. Determinar si L es suprayectivo.

III. Encontrar $U \in \mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))$ tal que

$$UL = I, \qquad LU = I.$$

Es obligatorio verificar ambas igualdades.

IV. Hacer conclusiones sobre la invertibilidad de L.

Ejercicio 14. *10 %.*
Invertibilidad del operador de desplazamiento a la izquierda en $\ell^p(\mathbb{Z})$. Sea $1 \leqslant p < +\infty$. Seguimos trabajando con el operador $L\colon \ell^p(\mathbb{Z}) \to \ell^p(\mathbb{Z})$ del ejercicio anterior.

I. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > 1$. Demostrar que el operador $\lambda I - L$ es invertible. Se recomienda usar el resultado sobre la serie de Neumann.

II. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < 1$. Demostrar que el operador $\lambda I - L$ es invertible. Se recomienda usar la igualdad

$$\lambda I - L = -L(I - laL^{-1})$$

y el resultado sobre la serie de Neumann.

III. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$. Dado n en $\mathbb{N}$, pongamos

$$u_n \coloneqq \sum_{j=0}^{m} \lambda^j e_j.$$

Calcular

$$(\lambda I - L)u_n, \qquad \|(\lambda I - L)u_n\|_p, \qquad \|u_n\|_p, \qquad \frac{\|(\lambda I - L)u_n\|_p}{\|u_n\|_p}.$$

IV. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$. Demostrar que $\lambda I - L$ no es “acotado por abajo” y por eso no es invertible.

V. Encontrar el espectro de L.

Análisis Matemático IV.
Tarea "Transformaciones lineales acotadas en espacios normados".
Variante 3.

Transformaciones lineales y operaciones con conjuntos de vectores, varias descripciones equivalentes de transformaciones lineales acotadas, varias definiciones equivalentes de la norma de la transformación lineal, normas de matrices, normas de funcionales lineales, ejemplos de funcionales lineales acotados y no acotados, ejemplos de espacios duales, ejemplos de aplicaciones del teorema de Hahn–Banach, ejemplos de análisis de invertibilidad.

Ejercicio 1. *5 %.*
Transformaciones lineales y operaciones con conjuntos de vectores. Sean V, W espacios vectoriales complejos y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal no nula. Supongamos que $V \neq \{0_V\}$. Encontrar un conjunto $X \subseteq V$ tal que

$$T[X + X] \neq 2\,T[X].$$

Este ejercicio muestra que en algunos casos $T[\alpha X + \beta X]$ no coincide con $(\alpha + \beta)T[X]$.

Ejercicio 2. *5 %.*
Transformaciones lineales acotadas, varias descripciones equivalentes. Sean V, W espacios normados, $V \neq \{0_V\}$, y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Denotamos por X_V a la bola unitaria cerrada en V:

$$X_V := \big\{x \in V\colon\ \|x\|_V \leqslant 1\big\}.$$

Supongamos que $T[X_V]$ es un conjunto acotado en W. Demostrar de manera directa que T es una transformación lineal acotada, es decir, existe $C \geqslant 0$ tal que

$$\forall v \in V \qquad \|Tv\|_W \leqslant C\,\|v\|_V.$$

Este ejercicio es una parte del criterio de transformaciones lineales acotadas.

Ejercicio 3. *5 %.*
Varias fórmulas equivalentes para la norma de una transformación lineal. Sean V, W espacios normados, $V \neq \{0_V\}$, y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Demostrar de manera directa que

$$\sup_{\substack{x \in V\\ x \neq 0_V}} \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\substack{x \in V\\ \|v\|_V = 1}} \|Tv\|_W.$$

Ejercicio 4. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma de la transformación lineal asociada a una matriz, cuando los espacios de vectores están dotados de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Sea

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular el número

$$M := \max_{1\leqslant j\leqslant 2} \sum_{k=1}^{3} |A_{j,k}|.$$

II. Demostrar que para cada x en $\mathbb{C}^3$ se cumple la desigualdad

$$\|Ax\|_\infty \leqslant M\,\|x\|_\infty.$$

III. Construir un vector y en $\mathbb{C}^3$ tal que

$$\|y\|_\infty = 1, \qquad \|Ay\|_\infty = M.$$

IV. Definimos $T_A \colon (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $T_A(x) := Ax$. Calcular la norma de T_A.

Ejercicio 5. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma de la transformación lineal asociada a una matriz, cuando los espacios de vectores están dotados de la norma $\|\cdot\|_1$. Sea

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcular el número

$$N := \max_{1\leqslant k\leqslant 3} \sum_{j=1}^{2} |A_{j,k}|.$$

II. Demostrar que para cada x en $\mathbb{C}^3$ se cumple la desigualdad

$$\|Ax\|_1 \leqslant N\,\|x\|_1.$$

III. Construir un vector z en $\mathbb{C}^3$ tal que

$$\|z\|_1 = 1, \qquad \|Az\|_1 = N.$$

IV. Definimos $U_A \colon (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_1)$, $U_A(x) := Ax$. Calcular la norma de U_A.

En los siguientes 4 ejercicios (ejercicios 6, 7, 8, 9) se trata de funcionales lineales acotados en un espacio de sucesiones. Se recomienda resolver estos ejercicios en el orden indicado.

Ejercicio 6. *5 %.*
La base de Schauder canónica del espacio de las sucesiones de soporte finito con la norma de ℓ^1. Denotamos por V al espacio de las sucesiones de soporte finito, dotado de la norma de ℓ^1:

$$V := \Big\{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\colon \quad \big\{k \in \mathbb{N}\colon\ x_k \neq 0\big\} \text{ es finito}\Big\}, \qquad \|x\|_V := \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.$$

Usando el criterio de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, mostrar que

$$V = \Big\{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\colon \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k > m \quad x_k = 0\Big\}.$$

Para cada p en $\mathbb{N}$, denotamos por e_p la p-ésima sucesión básica. Demostrar que $(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de V. Más aún, mostrar que cada elemento de V es una combinación lineal finita de sucesiones básicas.

Ejercicio 7. *10 %.*
Funcionales lineales acotados en el espacio de las sucesiones de soporte finito con la norma de ℓ^1. Denotamos por V al espacio normado del ejercicio anterior. Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Definimos $\varphi_a\colon V \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

I. Demostrar que la serie en la definición de φ_a converge de manera absoluta y que $|\varphi_a(x)| \leqslant \|a\|_\infty \, \|x\|_V$.

II. Demostrar que φ_a es un funcional lineal.

III. Dado m en $\mathbb{N}$, calcular $\|e_m\|_V$, $\varphi_a(e_m)$ y $|\varphi_a(e_m)|$, donde $e_m = \big(\delta_{m,k}\big)_{k\in\mathbb{N}}$.

IV. Demostrar que $\|\varphi_a\| = \|a\|_\infty$.

Ejercicio 8. *10 %.*
La forma general de los funcionales lineales acotados en el espacio de las sucesiones de soporte finito con la norma de ℓ^1. Sea V el espacio normado del ejercicio anterior y sea $\psi\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal acotado. Construir a en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ tal que $\psi = \varphi_a$, donde φ_a está definido en el ejercicio anterior. Notemos las etapas importantes de la solución.

I. Definir a_p para cada p en $\mathbb{N}$.

II. Demostrar que $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Esta es la parte más interesante del ejercicio. Se recomienda utilizar la desigualdad

$$|\psi(e_m)\| \leqslant \|\psi\| \, \|e_m\|_1.$$

III. Demostrar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$ para cada x en V. Se recomienda representar x como cierta combinación lineal (finita) de las sucesiones básicas.

Ejercicio 9. *5 %.*
Ejemplo de funcional lineal acotado en el espacio de las sucesiones de soporte finito con la norma de ℓ^1. Sea V el espacio de los ejercicios anteriores. Definimos $\eta\colon V \to \mathbb{C}$,

$$\eta(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j+1} x_{2j},$$

esto es,
$$\eta(x) = \frac{1}{2}x_2 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{3}{4}x_6 + \cdots.$$
I. Encontrar a en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ tal que $\eta = \varphi_a$, donde φ_a está definido en los ejercicios anteriores.

II. Calcular $\|\eta\|$ usando los resultados de los ejercicios anteriores.

Ejercicio 10. *8 %.*
Ejemplo de funcional lineal no acotado. Denotemos por $\mathcal{P}([0,5])$ al espacio normado complejo de las funciones polinomiales definidas en $[0,5]$, con la norma-supremo. Definimos $\rho\colon \mathcal{P}([0,5]) \to \mathbb{C}$,
$$\rho(x) := 3x'(1).$$
I. Mostrar que f es un funcional lineal.

II. Construir una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \in \mathcal{P}([0,5])$ para cada n en $\mathbb{N}$, $\|y_n\|_{\sup} > 0$ para cada n en $\mathbb{N}$ y
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\rho(y_n)|}{\|y_n\|_{\sup}} = +\infty.$$
III. Demostrar que ρ no es acotado.

Ejercicio 11. *8 %.*
Cada funcional lineal con núcleo cerrado es continuo. Sea V un espacio normado complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo. Supongamos que $W := \ker(f)$ es un subconjunto cerrado de V. Demostrar que f es continuo usando el espacio cociente V/W. Es importante explicar bien las siguientes partes de la solución.

I. Demostrar que la proyección canónica $Q\colon V \to V/W$ es continua.

II. Mostrar que existe un isomorfismo de espacios vectoriales $A\colon V/W \to \mathbb{C}$.

III. Mostrar que A es una función continua.

IV. Definimos $g := A \circ Q$. Demostrar que $\ker(f) = W$.

V. Mostrar que g es una función continua y f es un múltiplo de g.

En los siguientes 3 ejercicios (ejercicios 12, 13, 14) se trata de un operador lineal acotado en un espacio de sucesiones.

Ejercicio 12. *10 %.*
El operador de desplazamiento a la derecha en $\ell^p(\mathbb{Z})$. Sea $1 \leqslant p < +\infty$. Definimos $R\colon \ell^p(\mathbb{Z}) \to \ell^p(\mathbb{Z})$,
$$(Rx)_k := x_{k-1}.$$
I. Para entender mejor la definición de Rx, calcular las siguientes componentes de la sucesión Rx:
$$(Rx)_{-2}, \qquad (Rx)_{-1}, \qquad (Rx)_0, \qquad (Rx)_1, \qquad (Rx)_2.$$
Después de esto, escribir la respuesta en forma breve:
$$Rx = \Big(\ldots,\ ?,\ ?,\ \underbrace{\ ?\ }_{\text{posición } 0},\ ?,\ ?,\ \ldots\Big).$$

También escribir la respuesta como la siguiente tabla.

k	-2	-1	0	1	2
x_k	x_{-2}	x_{-1}	x_0	x_1	x_2
$(Rx)_k$	?	?	?	?	?

II. Sea $x \in \ell^p(\mathbb{Z})$. Demostrar que $Rx \in \ell^p(\mathbb{Z})$ y $\|Rx\|_p = \|x\|_p$. En particular, este cálculo justifica que la definición del operador R es consistente.

III. Demostrar que R es un operador lineal.

IV. Demostrar que R es un operador lineal acotado y $\|R\| = 1$.

V. Sea $m \in \mathbb{N}$. Calcular Re_m, donde $e_m = \left(\delta_{m,k}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$. Indicación: es obligatorio usar la definición formal de R.

Ejercicio 13. *10 %.*
Invertibilidad del operador de desplazamiento a la derecha en $\ell^p(\mathbb{Z})$. Sea $1 \leqslant p < +\infty$. Seguimos trabajando con el operador $R\colon \ell^p(\mathbb{Z}) \to \ell^p(\mathbb{Z})$ del ejercicio anterior.

I. Calcular $\ker(R)$. Determinar si R es inyectivo.

II. Sea $y \in \ell^p(\mathbb{Z})$. Encontrar x en $\ell^p(\mathbb{Z})$ tal que $Rx = y$. Determinar si R es suprayectivo.

III. Encontrar $U \in \mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{Z}))$ tal que

$$UR = I, \qquad RU = I.$$

Es obligatorio verificar ambas igualdades.

IV. Hacer conclusiones sobre la invertibilidad de R.

Ejercicio 14. *10 %.*
Invertibilidad del operador de desplazamiento a la derecha en $\ell^p(\mathbb{Z})$. Sea $1 \leqslant p < +\infty$. Seguimos trabajando con el operador $R\colon \ell^p(\mathbb{Z}) \to \ell^p(\mathbb{Z})$ del ejercicio anterior.

I. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > 1$. Demostrar que el operador $\lambda I - R$ es invertible. Se recomienda usar el resultado sobre la serie de Neumann.

II. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < 1$. Demostrar que el operador $\lambda I - R$ es invertible. Se recomienda usar la igualdad

$$\lambda I - R = -R(I - laR^{-1})$$

y el resultado sobre la serie de Neumann.

III. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$. Dado n en $\mathbb{N}$, pongamos

$$w_n := \sum_{j=0}^{m} \lambda^{-j} e_j.$$

Calcular

$$(\lambda I - R)w_n, \qquad \|(\lambda I - R)w_n\|_p, \qquad \|w_n\|_p, \qquad \frac{\|(\lambda I - R)w_n\|_p}{\|w_n\|_p}.$$

IV. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$. Demostrar que $\lambda I - R$ no es "acotado por abajo" y por eso no es invertible.

V. Encontrar el espectro de R.