Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 2.
Variante α.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ y $g\colon X \to \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesón de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g. Se recomienda el plan:

a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.

b) Para todo punto x en X, usando la definición del límite, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X; en casi todos puntos de X.

d) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\|f_n - g\|_{\sup} := \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

e) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

g) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.

h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.

k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.

l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. *55 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = e^{-n^2x^2}$, $\quad g(x) = 0$.

Ejercicio 2. *45 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = 1_{[n,n+1[}(x), \qquad \text{esto es,} \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1, n \leqslant x < n+1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 2.
Variante β.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ y $g\colon X \to \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesón de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g. Se recomienda el plan:

a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.

b) Para todo punto x en X, usando la definición del límite, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X; en casi todos puntos de X.

d) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\|f_n - g\|_{\sup} := \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

e) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

g) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.

h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.

k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.

l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X\setminus E$.

Ejercicio 1. *55 %.*
$X = [0, 1)$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = x^n$, $\quad g(x) = 0$.

Ejercicio 2. *45 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = 1_{[n,+\infty)}(x), \qquad \text{esto es,} \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant n; \\ 0, \qquad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 2.
Variante 1.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ y $g \colon X \to \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesón de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g. Se recomienda el plan:

a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.

b) Para todo punto x en X, usando la definición del límite, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X; en casi todos puntos de X.

d) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\|f_n - g\|_{\sup} := \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

e) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

g) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.

h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.

k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.

l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. *55 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{\cosh(x-n)}, \quad g(x) = 0.$

Ejercicio 2. *45 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = (1 - |x-n|) \cdot 1_{[n-1,n+1]}(x), \qquad \text{esto es,} \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1 - |x-n|, & |x-n| \leqslant 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 2.
Variante 2.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ y $g \colon X \to \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesón de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g. Se recomienda el plan:

a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.

b) Para todo punto x en X, usando la definición del límite, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X; en casi todos puntos de X.

d) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\|f_n - g\|_{\sup} := \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

e) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

g) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.

h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.

k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.

l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. *55 %.*
$X = [0, 1]$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = 4^n x^n (1 - x)^n$, $g(x) = 0$.

Ejercicio 2. *45 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 1$,

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{|x|}{n}\right) \cdot 1_{[-n,n]}(x), \qquad \text{esto es,} \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{n}, & |x| \leqslant n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 2.
Variante 3.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ y $g \colon X \to \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesón de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g. Se recomienda el plan:

a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.

b) Para todo punto x en X, usando la definición del límite, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X; en casi todos puntos de X.

d) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\|f_n - g\|_{\sup} \coloneqq \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

e) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

g) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.

h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.

k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.

l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. *55 %.*
$X = (0, +\infty)$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \tanh(nx)$, $g(x) = 1$.

Ejercicio 2. *45 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = (1 - n \cdot |x - n|) \cdot 1_{[n-1/n,\, n+1/n]}(x), \qquad \text{esto es,} \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1 - n \cdot |x - n|, & |x - n| \leqslant 1/n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 2.
Variante 4.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ y $g\colon X \to \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesón de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g. Se recomienda el plan:

a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.

b) Para todo punto x en X, usando la definición del límite, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X; en casi todos puntos de X.

d) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\|f_n - g\|_{\sup} := \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

e) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

g) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.

h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.

k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.

l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. *55 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $\quad f_n(x) = \dfrac{6(x-n)}{(x-n)^2+1}, \quad g(x) = 0.$

Ejercicio 2. *45 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1_{[n,n+2[}, & n \text{ par;} \\ 1_{]-(n+2),-n]}, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Indicación: calcular $A(\varepsilon, n)$ para n pares e impares, luego $B(\varepsilon, k)$ para k pares e impares.

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 2.
Variante 5.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ y $g\colon X \to \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesón de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g. Se recomienda el plan:

a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.

b) Para todo punto x en X, usando la definición del límite, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X; en casi todos puntos de X.

d) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\|f_n - g\|_{\sup} := \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

e) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

g) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.

h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.

k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.

l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. *55 %.*
$X = (0, +\infty)$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \dfrac{nx}{x^2 + n^2}$, $\quad g(x) = 0$.

Ejercicio 2. *45 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = \left(1 - n\left|x - \frac{1}{n}\right|\right) \cdot 1_{[0,2/n]}(x), \qquad \text{esto es,} \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1 - n\left|x - \dfrac{1}{n}\right|, & 0 \leqslant x \leqslant 2/n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 2.
Variante 6.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ y $g \colon X \to \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesón de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g. Se recomienda el plan:

a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.

b) Para todo punto x en X, usando la definición del límite, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X; en casi todos puntos de X.

d) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\|f_n - g\|_{\sup} := \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

e) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

g) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.

h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.

k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.

l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. *55 %.*
$X = [0, \pi]$, μ es la medida de Lebesgue, $\quad f_n(x) = \cos\dfrac{x}{n}, \quad g(x) = 1.$

Ejercicio 2. *45 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = (1 + (-1)^n)\, 1_{[n,2n]}.$$

Indicación: calcular $A(\varepsilon, n)$ para n pares e impares, luego $B(\varepsilon, k)$ para k pares e impares.

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 2.
Variante 7.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ y $g\colon X \to \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesón de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g. Se recomienda el plan:

a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.

b) Para todo punto x en X, usando la definición del límite, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X; en casi todos puntos de X.

d) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\|f_n - g\|_{\sup} := \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

e) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

g) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.

h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.

k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.

l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. *55 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$, $\quad g(x) = 0$.

Ejercicio 2. *45 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{|x-n|}{n}\right) \cdot 1_{[0,2n]}(x), \qquad \text{esto es,} \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x-n|}{n}, & 0 \leqslant x \leqslant 2n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 2.
Variante 8.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ y $g \colon X \to \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesón de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g. Se recomienda el plan:

a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.

b) Para todo punto x en X, usando la definición del límite, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X; en casi todos puntos de X.

d) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\|f_n - g\|_{\sup} := \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

e) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

g) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.

h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.

k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.

l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. *55 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}$, $\quad g(x) = 1$.

Ejercicio 2. *45 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = (1 - |x + n|) \cdot 1_{[-n-1,-n+1]}(x), \qquad \text{esto es,} \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1 - |x+n|, & |x+n| \leqslant 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 2.
Variante 9.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ y $g \colon X \to \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesón de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g. Se recomienda el plan:

a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.

b) Para todo punto x en X, usando la definición del límite, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X; en casi todos puntos de X.

d) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\|f_n - g\|_{\sup} := \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

e) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

g) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.

h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.

k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.

l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \backslash E$.

Ejercicio 1. *55 %.*
$X =$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \dfrac{1}{|x - n| + 1}$, $\quad g(x) = 0$.

Ejercicio 2. *45 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = \big(1 - nx\big) \cdot 1_{[0,1/n]}(x), \qquad \text{esto es,} \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \leqslant x \leqslant 1/n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 2.
Variante 10.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ y $g \colon X \to \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesón de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g. Se recomienda el plan:

a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.

b) Para todo punto x en X, usando la definición del límite, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X; en casi todos puntos de X.

d) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\|f_n - g\|_{\sup} := \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

e) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

g) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ.

h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.

i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.

j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.

k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.

l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. *55 %.*
$X = (0, +\infty)$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \dfrac{n}{n + x}$, $\quad g(x) = 1$.

Ejercicio 2. *45 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = (1 - n \cdot |x + n|) \cdot 1_{[-n-\frac{1}{n}, -n+\frac{1}{n}]}(x), \quad \text{i.e.,} \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 - n \cdot |x + n|, & |x + n| \leqslant \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$