



Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante α .

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. 3%.

Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[-3n, -n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en \mathbb{R} hallar el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

y escribir el razonamiento completo basándose en la definición del límite.

3. Para cada n en \mathbb{N} , calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. 5%.

En el conjunto $X = (0, 1]$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n: (0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) := \begin{cases} n - nx, & 0 < x < \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

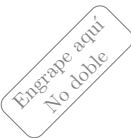
- a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
- b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- d) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) := \{x \in X: |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.
- f) Determinar si f_n converge a g en medida μ .
- g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.
- h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) := \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.
- i) Calcular $D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon)$.
- j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.
- k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).
- l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = e^{-n^2 x^2}$.

Ejercicio 4. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \chi_{[0, 1/n]}$.



Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante β .

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. 3%.

Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo $(0, 1/n]$, multiplicada por n .

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en \mathbb{R} hallar el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

y escribir el razonamiento completo basándose en la definición del límite.

3. Para cada n en \mathbb{N} , calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. 5%.

En el conjunto $X = (0, 1]$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n: (0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) := \begin{cases} n - nx, & 0 < x < \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

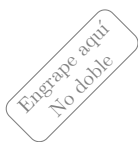
- a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
- b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- d) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) := \{x \in X: |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.
- f) Determinar si f_n converge a g en medida μ .
- g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.
- h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) := \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.
- i) Calcular $D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon)$.
- j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.
- k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).
- l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = e^{-n^2 x^2}$.

Ejercicio 4. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \chi_{[0, 1/n]}$.



Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 1 (ASD, CFS, MZJA).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. 3%.

Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[-1/n, 2/n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en \mathbb{R} hallar el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

y escribir el razonamiento completo basándose en la definición del límite.

3. Para cada n en \mathbb{N} , calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. 5%.

En el conjunto $X = (0, 1]$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n: (0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) := n \chi_{(0, 1/n]}(x) = \begin{cases} n, & 0 < x \leq \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

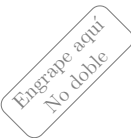
- a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
- b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- d) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) := \{x \in X: |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.
- f) Determinar si f_n converge a g en medida μ .
- g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.
- h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) := \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.
- i) Calcular $D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon)$.
- j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.
- k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).
- l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. 7%.

$X = [0, 1]$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) := 4^n x^n (1 - x)^n$.

Ejercicio 4. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) := \chi_{(-n-1, -n]}$.



Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 2 (JEA, MDCEA, SBE).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. 3%.

Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[n, 2n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en \mathbb{R} hallar el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

y escribir el razonamiento completo basándose en la definición del límite.

3. Para cada n en \mathbb{N} , calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. 5%.

En el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) := \chi_{[-2n, -n]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2n, -n]; \\ 0, & x \in (-\infty, -2n) \cup (-n, +\infty). \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

- a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
- b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- d) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) := \{x \in X: |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.
- f) Determinar si f_n converge a g en medida μ .
- g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.
- h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) := \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.
- i) Calcular $D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon)$.
- j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.
- k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).
- l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) := \frac{1}{1 + (x - n)^2}$.

Ejercicio 4. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) := n \cdot \chi_{[1-1/n, 1)} = \begin{cases} n, & x \in [1 - 1/n, 1), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [1 - 1/n, 1). \end{cases}$



Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 3 (JCJC, RELF, ZGSE).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. 3%.

Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[-1/n, 0]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en \mathbb{R} hallar el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

y escribir el razonamiento completo basándose en la definición del límite.

3. Para cada n en \mathbb{N} , calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. 5%.

En el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) := 2^{-n} \cdot \chi_{[2^n, 2^{n+1})}(x) = \begin{cases} 2^{-n}, & x \in [2^n, 2^{n+1}); \\ 0, & x \in (-\infty, 2^n) \cup (2^{n+1}, +\infty). \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

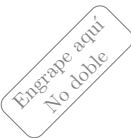
- a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
- b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- d) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) := \{x \in X: |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.
- f) Determinar si f_n converge a g en medida μ .
- g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.
- h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) := \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.
- i) Calcular $D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon)$.
- j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.
- k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).
- l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. 7%.

$X = [0, 1)$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) := x^n$.

Ejercicio 4. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) := n \cdot \chi_{(0, 1/n]} = \begin{cases} n, & x \in (0, 1/n], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (0, 1/n]. \end{cases}$



Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 4 (JEOHN, MMED, VRR).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. 3%.

Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[-3n, -n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en \mathbb{R} hallar el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

y escribir el razonamiento completo basándose en la definición del límite.

3. Para cada n en \mathbb{N} , calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. 5%.

En el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) := 2^n \cdot \chi_{[2^{-n-1}, 2^{-n}]}(x) = \begin{cases} 2^n, & x \in [2^{-n-1}, 2^{-n}]; \\ 0, & x \in (-\infty, 2^{-n-1}) \cup (2^{-n}, +\infty). \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

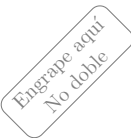
- a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
- b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- d) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) := \{x \in X: |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.
- f) Determinar si f_n converge a g en medida μ .
- g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.
- h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) := \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.
- i) Calcular $D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon)$.
- j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.
- k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).
- l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) := \frac{1}{1 + n^2 x^2}$.

Ejercicio 4. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) := \chi_{[3 \cdot (-1)^n, 5 \cdot (-1)^n]}$.



Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 5 (AMPAB, LDCJA, PCRD).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. 3%.

Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[1/n, 2n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en \mathbb{R} hallar el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

y escribir el razonamiento completo basándose en la definición del límite.

3. Para cada n en \mathbb{N} , calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. 5%.

En el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) := \frac{1}{n} \cdot \chi_{[n, 2n]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [n, 2n]; \\ 0, & x \in (-\infty, n) \cup (2n, +\infty). \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

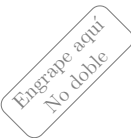
- a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
- b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- d) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) := \{x \in X: |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.
- f) Determinar si f_n converge a g en medida μ .
- g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.
- h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) := \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.
- i) Calcular $D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon)$.
- j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.
- k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).
- l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$.

Ejercicio 4. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) := \chi_{[-n-1, -n] \cup [n, n+1]}$.



Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 6 (DOMLA, HJNX, MSJM).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. 3%.

Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[-n, 1/n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en \mathbb{R} hallar el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

y escribir el razonamiento completo basándose en la definición del límite.

3. Para cada n en \mathbb{N} , calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. 5%.

En el conjunto $X = (0, +\infty)$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) := n \cdot e^{-nx}.$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

- a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
- b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- d) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) := \{x \in X: |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.
- f) Determinar si f_n converge a g en medida μ .
- g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.
- h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) := \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.
- i) Calcular $D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon)$.
- j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.
- k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).
- l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. 7%.

$X = (0, +\infty)$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = e^{-nx}$.

Ejercicio 4. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) := (-1)^n \cdot \chi_{[2^n, 2^{n+1}]}$.



Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 7 (AIAJ, GHE, TELD).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. 3%.

Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[n, n + \frac{1}{n}]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en \mathbb{R} hallar el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

y escribir el razonamiento completo basándose en la definición del límite.

3. Para cada n en \mathbb{N} , calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. 5%.

En el conjunto $X = [0, 1)$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n: [0, 1) \rightarrow [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) := (n + 1)x^n.$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

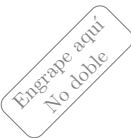
- a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
- b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- d) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) := \{x \in X: |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.
- f) Determinar si f_n converge a g en medida μ .
- g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.
- h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) := \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.
- i) Calcular $D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon)$.
- j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.
- k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).
- l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. 7%.

$X = (0, +\infty)$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \frac{x}{n+x}$.

Ejercicio 4. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) := \chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}$.



Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 8 (AGJE, SMJG, SGVD).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. 3%.

Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[2^{-n}, 2^n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en \mathbb{R} hallar el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

y escribir el razonamiento completo basándose en la definición del límite.

3. Para cada n en \mathbb{N} , calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. 5%.

En el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - |x - 2n|, & x \in [2n - 1, 2n + 1]; \\ 0, & x \in (-\infty, 2n - 1) \cup (2n + 1, +\infty). \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

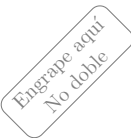
- a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
- b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- d) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) := \{x \in X: |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.
- f) Determinar si f_n converge a g en medida μ .
- g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.
- h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) := \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.
- i) Calcular $D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon)$.
- j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.
- k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).
- l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. 7%.

$X = (0, +\infty)$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \frac{n}{n+x}$.

Ejercicio 4. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) := \chi_{[-2+\frac{1}{n}, 3]}$.



Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 9 (MMD, AVLA).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. 3%.

Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[-2^n, 1/n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en \mathbb{R} hallar el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

y escribir el razonamiento completo basándose en la definición del límite.

3. Para cada n en \mathbb{N} , calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. 5%.

En el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) := \chi_{[n, 2n+1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [n, 2n+1]; \\ 0, & x \in (-\infty, n) \cup (2n+1, +\infty). \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

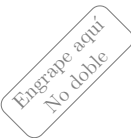
- a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
- b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- d) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) := \{x \in X: |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.
- f) Determinar si f_n converge a g en medida μ .
- g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.
- h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) := \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.
- i) Calcular $D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon)$.
- j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.
- k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).
- l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. 7%.

$X = (0, +\infty)$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \frac{nx}{x^2 + n^2}$.

Ejercicio 4. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) := \frac{n}{n+1} \cdot \chi_{[0, \frac{n}{n+1}]}$.



Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 10 (ARGJ, AAIA).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. 3%.

Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[-n, \frac{n}{n+1}]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en \mathbb{R} hallar el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

y escribir el razonamiento completo basándose en la definición del límite.

3. Para cada n en \mathbb{N} , calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. 5%.

En el conjunto $X = (0, +\infty)$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) := \frac{n}{(x+n)^2}.$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

- a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
- b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- d) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) := \{x \in X: |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.
- f) Determinar si f_n converge a g en medida μ .
- g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.
- h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) := \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.
- i) Calcular $D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon)$.
- j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.
- k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).
- l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \frac{1}{|x - n| + 1}$.

Ejercicio 4. 7%.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) := \left[-1, 1 + \frac{1}{n}\right)$.