Engrape aquí
No doble

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante α.

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. *3 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[-3n, -n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en $\mathbb{R}$ hallar el siguiente límite:
$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$
y escribir el razonamiento completo basándose en le definición del límite.
3. Para cada n en $\mathbb{N}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. *5 %.*
En el conjunto $X = (0, 1]$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n\colon (0, 1] \to [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) \coloneqq \begin{cases} n - nx, & 0 < x < \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.

b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

d) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) \coloneqq \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.

f) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) \coloneqq \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.

h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.

i) Calcular $D \coloneqq \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon)$.

j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.

k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).

l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. *7 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = e^{-n^2x^2}$.

Ejercicio 4. *7 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \chi_{[0,1/n)}$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante β.

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. *3 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo $(0, 1/n]$, multiplicada por n.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en $\mathbb{R}$ hallar el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

   y escribir el razonamiento completo basándose en le definición del límite.
3. Para cada n en $\mathbb{N}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. *5 %.*
En el conjunto $X = (0, 1]$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n \colon (0, 1] \to [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) := \begin{cases} n - nx, & 0 < x < \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int\limits_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.

b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

d) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) \coloneqq \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.

f) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) \coloneqq \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.

h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.

i) Calcular $D \coloneqq \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon)$.

j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.

k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).

l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. *7%.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = e^{-n^2x^2}$.

Ejercicio 4. *7%.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \chi_{[0,1/n)}$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 1 (ASD, CFS, MZJA).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. *3 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[-1/n, 2/n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en $\mathbb{R}$ hallar el siguiente límite:

$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

   y escribir el razonamiento completo basándose en le definición del límite.

3. Para cada n en $\mathbb{N}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. *5 %.*
En el conjunto $X = (0, 1]$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n \colon (0, 1] \to [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) \coloneqq n\,\chi_{(0,1/n]}(x) = \begin{cases} n, & 0 < x \leqslant \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n\colon X \to \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.

b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

d) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) \coloneqq \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.

f) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) \coloneqq \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.

h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.

i) Calcular $D \coloneqq \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon)$.

j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.

k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).

l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. *7 %.*
$X = [0, 1]$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq 4^n x^n (1 - x)^n$.

Ejercicio 4. *7 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq \chi_{(-n-1,-n]}$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 2 (JEA, MDCEA, SBE).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. *3 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[n, 2n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.

2. Para cada x en $\mathbb{R}$ hallar el siguiente límite:

$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

   y escribir el razonamiento completo basándose en le definición del límite.

3. Para cada n en $\mathbb{N}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. *5 %.*
En el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) \coloneqq \chi_{[-2n,-n]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2n, -n]; \\ 0, & x \in (-\infty, -2n) \cup (-n, +\infty). \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n\colon X \to \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.

b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

d) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) \coloneqq \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.

f) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) \coloneqq \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.

h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.

i) Calcular $D \coloneqq \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon)$.

j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.

k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).

l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. *7 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq \dfrac{1}{1 + (x - n)^2}$.

Ejercicio 4. *7 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq n \cdot \chi_{[1-1/n,1)} = \begin{cases} n, & x \in [1 - 1/n, 1), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [1 - 1/n, 1). \end{cases}$

Engrape aquí
No doble

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 3 (JCJC, RELF, ZGSE).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. *3 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[-1/n, 0]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en $\mathbb{R}$ hallar el siguiente límite:
$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$
y escribir el razonamiento completo basándose en le definición del límite.
3. Para cada n en $\mathbb{N}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. *5 %.*
En el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) \coloneqq 2^{-n} \cdot \chi_{[2^n,2^{n+1})}(x) = \begin{cases} 2^{-n}, & x \in [2^n, 2^{n+1}]; \\ 0, & x \in (-\infty, 2^n) \cup (2^{n+1}, +\infty). \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)\,d\mu \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.

b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

d) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) \coloneqq \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.

f) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) \coloneqq \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.

h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.

i) Calcular $D \coloneqq \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon)$.

j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.

k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).

l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. *7 %.*
$X = [0, 1)$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq x^n$.

Ejercicio 4. *7 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq n \cdot \chi_{(0,1/n]} = \begin{cases} n, & x \in (0, 1/n], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (0, 1/n]. \end{cases}$

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 4 (JEOHN, MMED, VRR).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. *3 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[-3n, -n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en $\mathbb{R}$ hallar el siguiente límite:

$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

   y escribir el razonamiento completo basándose en le definición del límite.

3. Para cada n en $\mathbb{N}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. *5 %.*
En el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) \coloneqq 2^n \cdot \chi_{[2^{-n-1}, 2^{-n}]}(x) = \begin{cases} 2^n, & x \in [2^{-n-1}, 2^{-n}]; \\ 0, & x \in (-\infty, 2^{-n-1}) \cup (2^{-n}, +\infty). \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.

b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

d) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) \coloneqq \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.

f) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) \coloneqq \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.

h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.

i) Calcular $D \coloneqq \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon)$.

j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.

k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).

l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. *7 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq \dfrac{1}{1 + n^2x^2}$.

Ejercicio 4. *7 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq \chi_{[3\cdot(-1)^n, 5\cdot(-1)^n]}$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 5 (AMPAB, LDCJA, PCRD).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. *3 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[1/n, 2n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en $\mathbb{R}$ hallar el siguiente límite:
$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$
y escribir el razonamiento completo basándose en le definición del límite.
3. Para cada n en $\mathbb{N}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. *5 %.*
En el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida mediante la regla
$$f_n(x) \coloneqq \frac{1}{n} \cdot \chi_{[n,2n]}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & x \in [n, 2n]; \\ 0, & x \in (-\infty, n) \cup (2n, +\infty). \end{cases}$$
Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule
$$\int\limits_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu.$$
Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:
$$h(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n\colon X \to \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.

b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

d) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) \coloneqq \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.

f) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) \coloneqq \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.

h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.

i) Calcular $D \coloneqq \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon)$.

j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.

k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).

l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. *7 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$.

Ejercicio 4. *7 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq \chi_{[-n-1,-n]\cup[n,n+1]}$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 6 (DOMLA, HJNX, MSJM).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. *3 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[-n, 1/n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en $\mathbb{R}$ hallar el siguiente límite:

$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

   y escribir el razonamiento completo basándose en le definición del límite.

3. Para cada n en $\mathbb{N}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. *5 %.*
En el conjunto $X = (0, +\infty)$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n \colon (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) \coloneqq n \cdot \mathrm{e}^{-nx}.$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.

b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

d) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) \coloneqq \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.

f) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) \coloneqq \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.

h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.

i) Calcular $D \coloneqq \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon)$.

j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.

k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).

l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. *7%.*
$X = (0, +\infty)$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = e^{-nx}$.

Ejercicio 4. *7%.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq (-1)^n \cdot \chi_{[2^n, 2^{n+1}]}$.

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 7 (AIAJ, GHE, TELD).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. *3 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $\left[n, n + \frac{1}{n}\right]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en $\mathbb{R}$ hallar el siguiente límite:
$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$
y escribir el razonamiento completo basándose en le definición del límite.
3. Para cada n en $\mathbb{N}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. *5 %.*
En el conjunto $X = [0, 1)$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n \colon [0, 1) \to [0, +\infty)$ definida mediante la regla
$$f_n(x) \coloneqq (n + 1)x^n.$$
Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule
$$\int\limits_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu.$$
Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:
$$h(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.

b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

d) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) := \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.

f) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.

h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) := \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.

i) Calcular $D := \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon)$.

j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.

k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).

l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. *7%.*
$X = (0, +\infty)$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \dfrac{x}{n + x}$.

Ejercicio 4. *7%.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) := \chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}$.

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 8 (AGJE, SMJG, SGVD).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. *3 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[2^{-n}, 2^n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.
2. Para cada x en $\mathbb{R}$ hallar el siguiente límite:
$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$
y escribir el razonamiento completo basándose en le definición del límite.
3. Para cada n en $\mathbb{N}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. *5 %.*
En el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) \coloneqq \begin{cases} 1 - |x - 2n|, & x \in [2n - 1, 2n + 1]; \\ 0, & x \in (-\infty, 2n - 1) \cup (2n + 1, +\infty). \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.

b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

d) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) \coloneqq \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.

f) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) \coloneqq \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.

h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.

i) Calcular $D \coloneqq \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon)$.

j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.

k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).

l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. *7 %.*
$X = (0, +\infty)$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \dfrac{n}{n + x}$.

Ejercicio 4. *7 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq \chi_{[-2+\frac{1}{n},3]}$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 9 (MMD, AVLA).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. *3 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $[-2^n, 1/n]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.

2. Para cada x en $\mathbb{R}$ hallar el siguiente límite:

$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

   y escribir el razonamiento completo basándose en le definición del límite.

3. Para cada n en $\mathbb{N}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. *5 %.*
En el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) \coloneqq \chi_{[n,2n+1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [n, 2n+1]; \\ 0, & x \in (-\infty, n) \cup (2n+1, +\infty). \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.

b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\sup_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

d) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) \coloneqq \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.

f) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) \coloneqq \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.

h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.

i) Calcular $D \coloneqq \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon)$.

j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.

k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).

l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. *7 %.*
$X = (0, +\infty)$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \dfrac{nx}{x^2 + n^2}$.

Ejercicio 4. *7 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq \dfrac{n}{n+1} \cdot \chi_{[0, \frac{n}{n+1}]}$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2. Variante 10 (ARGJ, AAIA).

Medidas, funciones medibles, varios modos de convergencia, convergencia de integrales.

Ejercicio 1. *3 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde f_n es la función característica del intervalo cerrado $\left[-n, \frac{n}{n+1}\right]$.

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.

2. Para cada x en $\mathbb{R}$ hallar el siguiente límite:

$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

y escribir el razonamiento completo basándose en le definición del límite.

3. Para cada n en $\mathbb{N}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Ejercicio 2. *5 %.*
En el conjunto $X = (0, +\infty)$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n \colon (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida mediante la regla

$$f_n(x) \coloneqq \frac{n}{(x+n)^2}.$$

Demuestre que f_n converge puntualmente a la función $g = 0$. Calcule

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la siguiente función h y muestre que h no es integrable:

$$h(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

En cada uno de los siguientes dos ejercicios hay que **analizar varios modos de convergencia** de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n \colon X \to \mathbb{R}$. Se recomienda el siguiente plan.

a) Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3$.

b) Para todo punto x en X calcular el límite puntual $g(x) \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Para todo n en $\mathbb{N}$ calcular $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

d) Determinar si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.

e) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n) \coloneqq \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}$. En este inciso y en los incisos g), h) es suficiente trabajar con valores de ε cercanos a cero.

f) Determinar si f_n converge a g en medida μ.

g) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k) \coloneqq \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$.

h) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon) \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k)$.

i) Calcular $D \coloneqq \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon)$.

j) Utilizando los resultados de los incisos g), i) comprobar las conclusiones sobre la convergencia uniforme y puntual.

k) Utilizando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme (llamada también *convergencia de Egórov*).

l) En el caso de respuesta positiva en k), para todo $\eta > 0$ construir un conjunto E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 3. *7 %.*
$X =$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \dfrac{1}{|x - n| + 1}$.

Ejercicio 4. *7 %.*
$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) \coloneqq \left[-1, 1 + \dfrac{1}{n}\right)$.