Tarea de Análisis Matemático II, temas preliminares

Variante 15. Integrantes del equipo: Pepito Esefemita Matemátez, Jorge Maxímez, Fulano Juan Pérez González.

Ejercicio 1. I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \oplus q \equiv (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q).$$

II. Definimos la *diferencia simétrica* de dos conjuntos A y B como

$$A \bigtriangleup B \coloneqq \{x\colon\ (x \in A)\ \oplus\ (x \in B)\}.$$

Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente propiedad de operaciones con conjuntos:

$$A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Solución. I. Consideramos todas las 4 opciones posibles para p y q.

p	q	$p \oplus q$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$\overline{p} \wedge q$	$(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0

II. Dado un punto x arbitario, tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}
x \in A \bigtriangleup B \quad &\xLeftrightarrow{\text{def. } \bigtriangleup} \quad (x \in A) \oplus (x \in B) \\
&\xLeftrightarrow{p \oplus q \equiv (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)} \quad \big((x \in A) \wedge \overline{(x \in B)}\big) \vee \big(\overline{(x \in A)} \wedge (x \in B)\big) \\
&\xLeftrightarrow{\text{conmut. } \wedge \text{ y def. } \setminus} \quad (x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A) \\
&\xLeftrightarrow{\text{def. } \cup} \quad x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A).
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2. I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r).$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Solución. I. Consideramos todas las 8 opciones posibles para p, q, r:

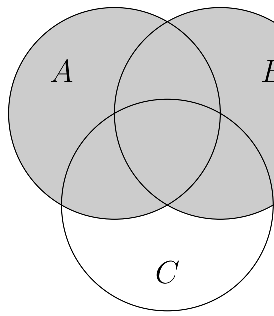
p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$(p \wedge q)$	$(q \wedge r)$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

II. Dado un punto x arbitario, tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

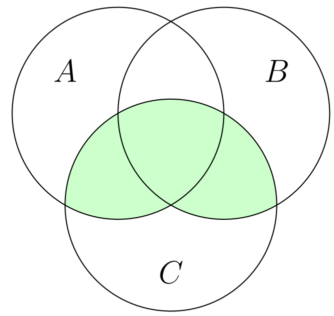
$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cap C \quad & \xLeftrightarrow{\text{def. } \cap} \quad (x \in A \cup B) \wedge (x \in C) \\
& \xLeftrightarrow{\text{def. } \cup} \quad \big((x \in A) \vee (x \in B)\big) \wedge (x \in C) \\
& \xLeftrightarrow{\text{resultado del inciso I}} \quad \big((x \in A) \wedge (x \in C)\big) \vee \big((x \in B) \wedge (x \in C)\big) \\
& \xLeftrightarrow{\text{def. } \cap} \quad (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) \\
& \xLeftrightarrow{\text{def. } \cup} \quad x \in (A \cap C) \cup (B \cap C).
\end{aligned}$$

III. Dibujemos $A \cup B$ y $(A \cup B) \cap C$:

$A \cup B$

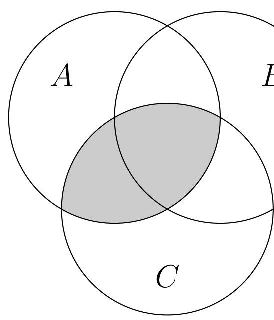


$(A \cup B) \cap C$

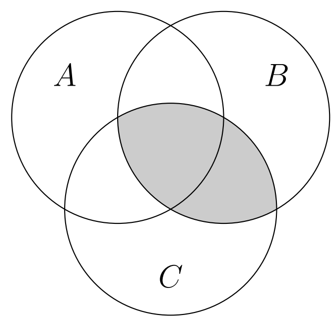


Por otro lado, dibujemos $A \cap C$, $B \cap C$ y $(A \cap C) \cup (B \cap C)$:

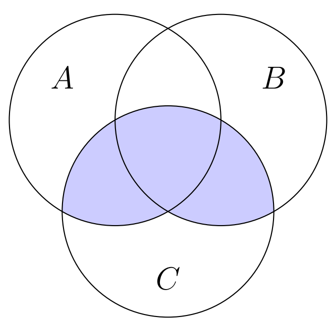
$A \cap C$



$B \cap C$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$



El dibujo verde coincide con el dibujo azul. $\square$

Ejercicio 3. Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq x^2 - 4x + 1, \quad B = (-2, 2].$$

Solución. En este ejercicio es cómodo escribir $f(x)$ de la siguiente manera (completar al cuadrado):

$$f(x) = (x-2)^2 - 3.$$

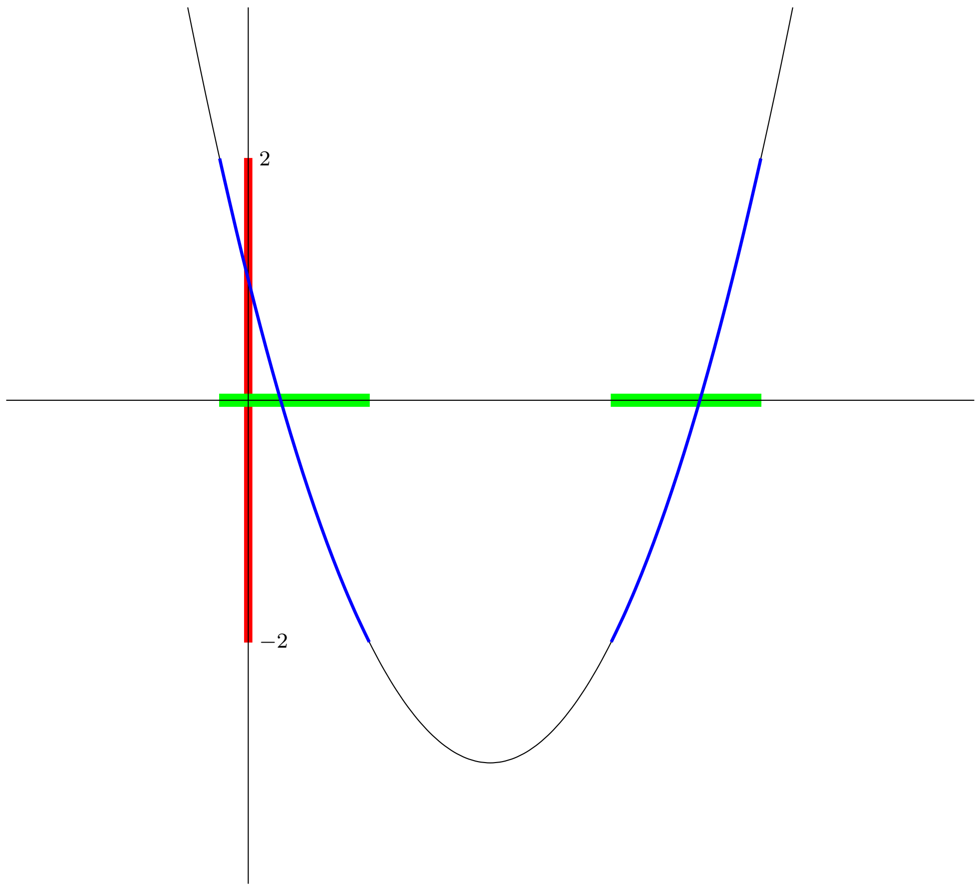
Calculamos la imagen inversa del conjunto B bajo la función f:

$$\begin{aligned}
f^{-1}[B] &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ f(x) \in (-2, 2]\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}\colon\ (x-2)^2 - 3 > -2 \quad \wedge \quad (x-2)^2 - 3 \le 2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}\colon\ (x-2)^2 > 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}\colon\ (x-2)^2 \le 5\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}\colon\ x - 2 > 1\ \vee\ x - 2 < -1\} \cap \{x \in \mathbb{R}\colon\ -\sqrt{5} \le x - 2 \le \sqrt{5}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}\colon\ x > 3\ \vee\ x < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}\colon\ 2 - \sqrt{5} \le x \le 2 + \sqrt{5}\} \\
&= \Big((-\infty, 1) \cup (3, +\infty)\Big) \cap [2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}] \\
&= [2 - \sqrt{5}, 1) \cup (3, 2 + \sqrt{5}].
\end{aligned}$$

Hagamos un dibujo. Indicamos con rojo el conjunto B en el eje y, con azul la parte de la gráfica de f que corresponde al conjunto B, es decir,

$$\{(x, y)) \in \mathbb{R}^2 \colon \ y = f(x) \ \wedge \ y \in B\},$$

y con verde el conjunto $f^{-1}[B]$ en el eje x.



$\square$

Ejercicio 4. Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq 3 - |x-1|, \quad B = (2,4).$$

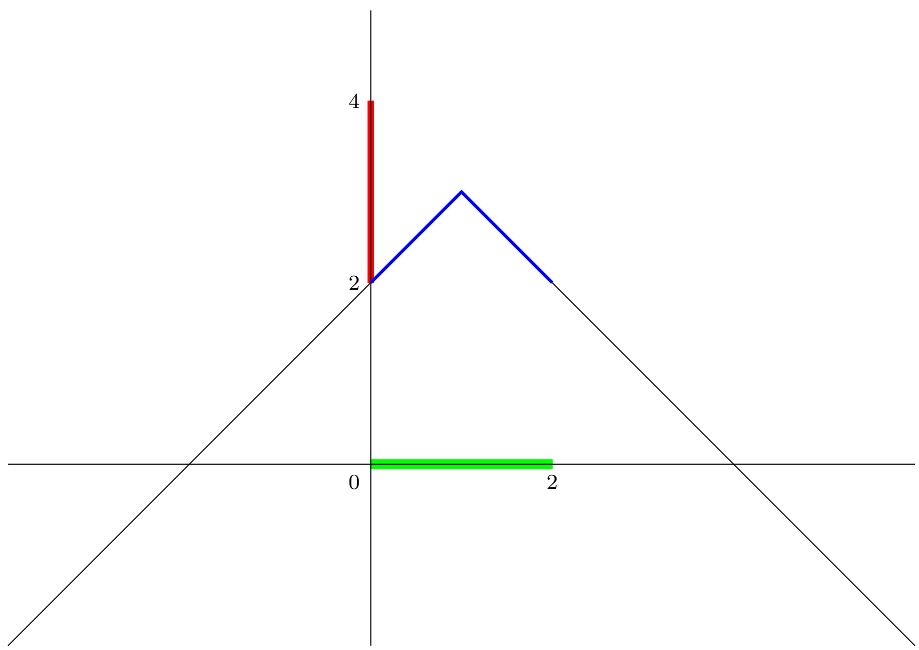
Solución. Calculamos $f^{-1}[B]$:

$$\begin{aligned}
f^{-1}[B] &= \{x \in \mathbb{R}\colon\ f(x) \in B\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}\colon\ 3 - |x-1| > 2\ \wedge\ 3 - |x-1| < 4\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}\colon\ |x-1| < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}\colon\ |x-1| > -1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}\colon\ -1 < x-1 < 1\} \cap \mathbb{R} = (0,2).
\end{aligned}$$

Hagamos un dibujo. Indicamos con rojo el conjunto B en el eje y, con azul la parte de la gráfica de f que corresponde al conjunto B, es decir,

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ f(x) = y\ \wedge\ y \in B\},$$

y con verde el conjunto $f^{-1}[B]$ en el eje x.



□

Ejercicio 5. Funciones acotadas. En el dominio $D = [-3,-1]$ consideremos la función $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Encontrar un $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para cada x en D.

Solución. Para cada x en D tenemos que $|x| \le 3$, luego

$$|f(x)| = 2|x|^2 + 4|x| + 5 \le 2 \cdot 9 + 4 \cdot 3 + 5 = 18 + 12 + 5 = 35.$$

$C = 35$. $\square$

Ejercicio 6. Usando **la definición del límite de una función** demostrar que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

donde $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x^2 + x + 1, \qquad a = -1, \qquad b = 2.$$

Solución. Recordemos la definición del límite:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \big(0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon\big).$$

Sea ε un número real positivo arbitrario. Nuestro objetivo es encontrar δ.

Primero transformemos la expresión $|f(x) - b|$:

$$|f(x) - b| = |2x^2 + x - 1| = |(2x - 1)(x + 1)| = |2x - 1| \cdot |x + 1|.$$

Supongamos que

$$|x + 1| \le 2. \tag{1}$$

Entonces

$$|2x - 1| = |2x + 2 - 3| \le 2|x + 1| + 3 \le 2 \cdot 2 + 3 = 7,$$

y

$$|f(x) - b| \le 7|x + 1|.$$

Supongamos que

$$|x + 1| \le \frac{\varepsilon}{7}. \tag{2}$$

Entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$. Notemos que las condiciones (1) y (2) son equivalentes a la condición $|x + 1| \le \delta$, donde

$$\delta \coloneqq \min\left\{2, \frac{\varepsilon}{7}\right\}.$$

Hemos encontrado un $\delta > 0$ tal que para cada x en $\mathbb{R}$, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces se cumplen (1) y (2) y luego se cumple $|f(x) - b| < \varepsilon$. $\square$