Norma-supremo (norma uniforme) de una función

1. Definición (norma-supremo de una función). Sean X un conjunto y $f\colon X \to \mathbb{C}$ una función. Entonces la *norma-supremo* de f se define como

$$N_\infty(f) \coloneqq \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Esta definición se generaliza de manera obvia al caso si $f\colon X \to Y$, donde Y es un espacio normado.

2. Definición (función acotada). Una función $f\colon X \to \mathbb{C}$ se llama *acotada* si $N_\infty(f) < +\infty$. Denotemos por $B(X,\mathbb{C})$ al conjunto de todas las funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$.

3. Ejercicio. Demostrar que $B(X,\mathbb{C})$ es un espacio de Banach. En otras palabras, hay que demostrar que es un espacio vectorial, que N_∞ es una norma y que $B(X,\mathbb{C})$ es completo respecto a la métrica inducida por la norma N_∞.

Cálculo de la norma-supremo

En algunos ejemplos es cómodo usar la siguiente proposición.

4. Sobre el supremo de los valores de una función creciente. Sea (a,b) un intervalo en $\mathbb{R}$ y sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces

$$\sup_{x\in(a,b)} f(x) = \lim_{\substack{x\to b\\ x\in(a,b)}} f(x).$$

5. Ejemplo. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$

Solución. Primero notamos que $f(x) \ge 0$ para $x \in [0,+\infty)$ y $f(x) < 0$ para $x < 0$. Por eso

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \max\left\{\sup_{x\ge 0} |f(x)|,\ \sup_{x<0} |f(x)|\right\} = \max\left\{\sup_{x\ge 0} f(x),\ \sup_{x<0}(-f(x))\right\}.$$

Para $x < 0$ hacemos el cambio de variable $t = -x$ y usamos el hecho que f es impar:

$$\sup_{x<0}(-f(x)) = \sup_{t>0}(-f(-t)) = \sup_{t>0} f(t) \le \sup_{t\ge 0} f(t).$$

Por lo tanto

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x\ge 0} f(x).$$

Ahora notamos que f es creciente en el intervalo $[0,+\infty)$. Es fácil deducirlo de la definición de arc tg o calculando la derivada. Por la Proposición 4,

$$\sup_{x\ge 0} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Respuesta: $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \pi/2.$ □

Calcular la norma-supremo de las siguientes funciones:

6. $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}(1 + x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$

7. $f(x) = 2^x, \quad x \in [-1, 5].$

8. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}, \quad x \in [-1, 1].$

En algunos ejemplos hay que calcular la derivada de f, encontrar los intervalos de monotonicidad, máximos y mínimos locales y los valores de f en los extremos del dominio. Calcular $N_\infty(f)$ para las siguientes funciones f:

9. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad x \geq 1.$

10. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

11. $f(x) = xe^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$

12. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad x \in [0.01, 100].$

13. $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^4}, \quad x \in (0, +\infty).$ Indicación: es cómodo hacer un cambio de variable.

En algunos ejemplos la función f se representa como una composición de funciones más simples. Puede ser cómodo calcular la imagen de f por pasos y luego determinar el supremo de sus valores absolutos.

14. Ejemplo. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4\cos(x) - 10}{5 - 2\cos(x)}.$

Solución. Notamos que $f = g \circ \cos$, donde $g(t) = \frac{4t-10}{5-2t} = \frac{1}{5-2t} - 2$. Se sabe que la imagen de la función cos es $[-1, 1]$:

$$\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1].$$

Como g decrece en $[-1, 1]$,

$$g[[-1, 1]] = [g(1), g(-1)] = \left[-\frac{5}{3}, -1\right].$$

Por lo tanto, $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \sup\limits_{t \in [-1,1]} |g(t)| = \dfrac{5}{3}.$ □

15. Ejercicio. $f(x) = \dfrac{10}{1 + \sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}.$