El supremo y el ínfimo de la unión de conjuntos (un tema de análisis real)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

12 de marzo de 2024

Objetivos:

- demostrar la propiedad creciente de sup y la propiedad decreciente de inf,
- demostrar fórmulas para $\sup(A \cup B)$, $\inf(A \cup B)$, $\sup\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right)$, $\inf\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right)$.

Prerrequisitos:

- el eje real extendido $\overline{\mathbb{R}}$,
- las definiciones de $\inf(A)$ y $\sup(A)$, donde $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$,
- el criterio para la desigualdad $\sup(A) \leq b$,
- la definición de $A \cup B$, la definición de $\bigcup_{j\in J} A_j$.

Cotas superiores y cotas inferiores (repaso)

Dado un subconjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, consideramos el conjunto de sus cotas superiores y el conjunto de sus cotas inferiores:

$$\mathrm{CS}(A) := \{ b \in \overline{\mathbb{R}} \colon \quad \forall a \in A \quad a \le b \}, \qquad \mathrm{CI}(A) := \{ b \in \overline{\mathbb{R}} \colon \quad \forall a \in A \quad a \ge b \}.$$

Ejemplo. Sea $A = \ [4, 9[\ .$ Entonces,

Cotas superiores y cotas inferiores (repaso)

Dado un subconjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, consideramos el conjunto de sus cotas superiores y el conjunto de sus cotas inferiores:

$$\mathrm{CS}(A) := \{b \in \overline{\mathbb{R}} \colon \quad \forall a \in A \quad a \le b\}, \qquad \mathrm{CI}(A) := \{b \in \overline{\mathbb{R}} \colon \quad \forall a \in A \quad a \ge b\}.$$

Ejemplo. Sea $A = [4, 9[$. Entonces,

$$\mathrm{CS}(A) = [9, +\infty], \qquad \mathrm{CI}(A) = [-\infty, 4].$$

Definiciones del supremo y del ínfimo (repaso)

Proposición: Para cada $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el conjunto $\mathrm{CS}(A)$ tiene un elemento mínimo.

Definiciones del supremo y del ínfimo (repaso)

Proposición: Para cada $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el conjunto $\mathsf{CS}(A)$ tiene un elemento mínimo.

Proposición: Para cada $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el conjunto $\mathsf{CI}(A)$ tiene un elemento máximo.

Definiciones del supremo y del ínfimo (repaso)

Proposición: Para cada $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el conjunto $\mathrm{CS}(A)$ tiene un elemento mínimo.

Proposición: Para cada $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el conjunto $\mathrm{CI}(A)$ tiene un elemento máximo.

Estas proposiciones son no triviales.

Sus demostraciones se basan en la construcción de los números reales.

Definiciones del supremo y del ínfimo (repaso)

Proposición: Para cada $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el conjunto $\mathsf{CS}(A)$ tiene un elemento mínimo.

Proposición: Para cada $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el conjunto $\mathsf{CI}(A)$ tiene un elemento máximo.

Estas proposiciones son no triviales.

Sus demostraciones se basan en la construcción de los números reales.

Definición. Dado $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$,

$$\sup(A) := \min(\mathsf{CS}(A)), \qquad \inf(A) := \max(\mathsf{CI}(A)).$$

Criterio de la desigualdad $\sup(A) \leq b$, repaso

Proposición

Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces,

$$\sup(A) \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \qquad a \leq b.$$

La propiedad creciente del supremo

Lema

Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $A \subseteq B$, $u \in \mathrm{CS}(B)$. Entonces, $u \in \mathrm{CS}(A)$.

La propiedad creciente del supremo

Lema

Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $A \subseteq B$, $u \in \mathrm{CS}(B)$. Entonces, $u \in \mathrm{CS}(A)$.

Demostración. Si $a \in A$, entonces $a \in B$ y $a \leq u$.

La propiedad creciente del supremo

Lema

Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $A \subseteq B$, $u \in \mathrm{CS}(B)$. Entonces, $u \in \mathrm{CS}(A)$.

Demostración. Si $a \in A$, entonces $a \in B$ y $a \leq u$.

Proposición

Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces, $\sup(A) \leq \sup(B)$.

La propiedad creciente del supremo

Lema

Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $A \subseteq B$, $u \in \mathrm{CS}(B)$. Entonces, $u \in \mathrm{CS}(A)$.

Demostración. Si $a \in A$, entonces $a \in B$ y $a \leq u$.

Proposición

Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces, $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Demostración.
$\sup(B) \in \mathrm{CS}(B)$. Luego, por el lema, $\sup(B) \in \mathrm{CS}(A)$. Por eso $\sup(A) \leq \sup(B)$.

La propiedad decreciente del ínfimo

Proposición

Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces, $\inf(A) \geq \inf(B)$.

Ejercicio: demostrar la proposición.

El supremo de la unión de dos conjuntos

Proposición

Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Entonces,

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A),\ \sup(B)\}.$$

Demostración: $\sup(A \cup B) \leq \max\big\{\sup(A),\ \sup(B)\big\}$

Consideremos el caso $\max\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(B)$, esto es, $\sup(A) \leq \sup(B)$.
El otro caso es similar.

Demostración: $\sup(A \cup B) \leq \max\big\{\sup(A),\ \sup(B)\big\}$

Consideremos el caso $\max\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(B)$, esto es, $\sup(A) \leq \sup(B)$.
El otro caso es similar.

Dado x en $A \cup B$, consideremos dos casos.

Demostración: $\sup(A \cup B) \leq \max\big\{\sup(A),\ \sup(B)\big\}$

Consideremos el caso $\max\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(B)$, esto es, $\sup(A) \leq \sup(B)$.
El otro caso es similar.

Dado x en $A \cup B$, consideremos dos casos.

- $x \in A$. En este caso, $x \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.
- $x \in B$. En este caso, $x \leq \sup(B)$.

Demostración: $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup(A),\ \sup(B)\}$

Consideremos el caso $\max\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(B)$, esto es, $\sup(A) \leq \sup(B)$.
El otro caso es similar.

Dado x en $A \cup B$, consideremos dos casos.

- $x \in A$. En este caso, $x \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.
- $x \in B$. En este caso, $x \leq \sup(B)$.

En ambos casos, $x \leq \sup(B)$.

Demostración: $\sup(A \cup B) \leq \max\left\{\sup(A),\ \sup(B)\right\}$

Consideremos el caso $\max\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(B)$, esto es, $\sup(A) \leq \sup(B)$.
El otro caso es similar.

Dado x en $A \cup B$, consideremos dos casos.

- $x \in A$. En este caso, $x \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.
- $x \in B$. En este caso, $x \leq \sup(B)$.

En ambos casos, $x \leq \sup(B)$.

Hemos demostrado que $\sup(B) \in \mathrm{CS}(A \cup B)$.

Demostración: $\sup(A \cup B) \leq \max\big\{\sup(A),\ \sup(B)\big\}$

Consideremos el caso $\max\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(B)$, esto es, $\sup(A) \leq \sup(B)$.
El otro caso es similar.

Dado x en $A \cup B$, consideremos dos casos.

- $x \in A$. En este caso, $x \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.
- $x \in B$. En este caso, $x \leq \sup(B)$.

En ambos casos, $x \leq \sup(B)$.

Hemos demostrado que $\sup(B) \in \mathrm{CS}(A \cup B)$.

Esto implica que $\sup(A \cup B) \leq \sup(B)$.

Demostración: $\sup(A \cup B) \leq \max\big\{\sup(A),\ \sup(B)\big\}$

Como $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, por la propiedad creciente de sup obtenemos

$$\sup(A) \leq \sup(A \cup B), \qquad \sup(B) \leq \sup(A \cup B).$$

Luego $\max\{\sup(A), \sup(B)\} \leq \sup(A \cup B)$.

El ínfimo de la unión de dos conjuntos

Proposición

Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Entonces,

$$\inf(A \cup B) = \inf\{\inf(A),\ \inf(B)\}.$$

¿Qué podemos decir sobre $\sup(A \cap B)$?

Ejercicio.

Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Demostrar que

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

¿Qué podemos decir sobre $\sup(A \cap B)$?

Ejercicio.

Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Demostrar que

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

Ejercicio.

Encontrar $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tales que

$$\sup(A \cap B) \neq \sup(A), \qquad \sup(A \cap B) \neq \sup(B).$$

¿Qué podemos decir sobre $\sup(A \cap B)$?

Ejercicio.
Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Demostrar que

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

Ejercicio.
Encontrar $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tales que

$$\sup(A \cap B) \neq \sup(A), \qquad \sup(A \cap B) \neq \sup(B).$$

Una versión más interesante de este ejercicio:
adicionalmente, que A sea acotado, B sea acotado, y que $A \cap B$ sea no vacío.

$\inf(A \cup B)$, $\inf(A \cap B)$

Enunciar y demostrar resultados similares para $\inf(A \cup B)$ e $\inf(A \cap B)$.

El supremo de la unión de una familia de conjuntos

Proposición

Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia en $2^{\overline{\mathbb{R}}}$, esto es,

$$\forall j \in J \qquad A_j \subseteq \overline{\mathbb{R}}.$$

Pongamos $B := \bigcup_{j\in J} A_j$. Entonces,

$$\sup(B) = \sup\{\sup(A_j)\colon\ j \in J\}.$$

El supremo de la unión de una familia de conjuntos

Proposición

Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia en $2^{\overline{\mathbb{R}}}$, esto es,

$$\forall j \in J \qquad A_j \subseteq \overline{\mathbb{R}}.$$

Pongamos $B := \bigcup_{j\in J} A_j$. Entonces,

$$\sup(B) = \sup\{\sup(A_j)\colon\ j \in J\}.$$

Notación. $C := \{\sup(A_j)\colon\ j \in J\}$.

Idea de demostración: $\sup(B) \le \sup(C)$

$$B := \bigcup_{j\in J} A_j, \qquad C := \{\sup(A_j)\colon\ j \in J\}.$$

Idea de demostración: $\sup(B) \le \sup(C)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \qquad C := \{\sup(A_j) \colon\ j \in J\}.$$

$\boxed{x \in B}$

Idea de demostración: $\sup(B) \leq \sup(C)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \qquad C := \{\sup(A_j) \colon\ j \in J\}.$$

$$\boxed{x \in B} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{elegimos } k \in J\text{:}\\ x \ \in\ A_k\end{array}}$$

Idea de demostración: $\sup(B) \le \sup(C)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \qquad C := \{\sup(A_j) \colon\ j \in J\}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \boxed{x \le \sup(A_k)} \\
\boxed{x \in B} \arrow[r] & \boxed{\begin{array}{c}\text{elegimos } k \in J\text{:} \\ x \ \in \ A_k\end{array}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Idea de demostración: $\sup(B) \leq \sup(C)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \qquad C := \{\sup(A_j) \colon\ j \in J\}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & x \leq \sup(A_k) \\
x \in B \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{elegimos } k \in J\text{:} \\ x \in A_k\end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \sup(A_k) \in C
\end{tikzcd}$$

Idea de demostración: $\sup(B) \le \sup(C)$

$$B := \bigcup_{j\in J} A_j, \qquad C := \{\sup(A_j)\colon\ j \in J\}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & x \le \sup(A_k) & \\
x \in B \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{elegimos } k \in J\text{:}\\ x \in A_k\end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & \sup(A_k) \in C \arrow[r] & \sup(A_k) \le \sup(C)
\end{tikzcd}$$

Idea de demostración: $\sup(B) \leq \sup(C)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \qquad C := \{\sup(A_j) \colon\ j \in J\}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & x \leq \sup(A_k) \arrow[drr] & & \\
x \in B \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{elegimos } k \in J\text{:}\\ x \in A_k\end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & x \leq \sup(C) \\
 & & \sup(A_k) \in C \arrow[r] & \sup(A_k) \leq \sup(C) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Demostración: $\sup(C) \le \sup(B)$

$$B := \bigcup_{j\in J} A_j, \qquad C := \{\sup(A_j)\colon\ j \in J\}.$$

Demostración: $\sup(C) \leq \sup(B)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \qquad C := \{\sup(A_j) \colon\ j \in J\}.$$

Si $y \in C$, entonces existe k en J tal que $y = \sup(A_k)$.

Demostración: $\sup(C) \leq \sup(B)$

$$B := \bigcup_{j\in J} A_j, \qquad C := \{\sup(A_j)\colon\ j \in J\}.$$

Si $y \in C$, entonces existe k en J tal que $y = \sup(A_k)$.

Como $A_k \subseteq B$, obtenemos $y \leq \sup(B)$.

Demostración: $\sup(C) \leq \sup(B)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \qquad C := \{\sup(A_j) \colon\ j \in J\}.$$

Si $y \in C$, entonces existe k en J tal que $y = \sup(A_k)$.

Como $A_k \subseteq B$, obtenemos $y \leq \sup(B)$.

Hemos mostrado que $\sup(B) \in \mathrm{CS}(C)$.

Demostración: $\sup(C) \leq \sup(B)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \qquad C := \{\sup(A_j) \colon \ j \in J\}.$$

Si $y \in C$, entonces existe k en J tal que $y = \sup(A_k)$.

Como $A_k \subseteq B$, obtenemos $y \leq \sup(B)$.

Hemos mostrado que $\sup(B) \in \mathrm{CS}(C)$.

Luego $\sup(C) \leq \sup(B)$.

El ínfimo de la unión de una familia de conjuntos

Ejercicio.

Sea $(A_j)_{j\in J}$ una familia en $2^{\overline{\mathbb{R}}}$. Pongamos $B := \bigcup_{j\in J} A_J$. Demostrar que

$$\inf(B) = \inf\{\inf(A_j) \colon\ j \in J\}.$$