

# El supremo y el ínfimo de la unión de conjuntos (un tema de análisis real)

Egor Maximenko

<https://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional  
Escuela Superior de Física y Matemáticas  
México

12 de marzo de 2024

## Objetivos:

- demostrar la propiedad creciente de  $\sup$  y la propiedad decreciente de  $\inf$ ,
- demostrar fórmulas para  $\sup(A \cup B)$ ,  $\inf(A \cup B)$ ,  $\sup\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)$ ,  $\inf\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)$ .

## Prerrequisitos:

- el eje real extendido  $\overline{\mathbb{R}}$ ,
- las definiciones de  $\inf(A)$  y  $\sup(A)$ , donde  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,
- el criterio para la desigualdad  $\sup(A) \leq b$ ,
- la definición de  $A \cup B$ , la definición de  $\bigcup_{j \in J} A_j$ .

## Cotas superiores y cotas inferiores (repaso)

Dado un subconjunto  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ , consideramos el conjunto de sus cotas superiores y el conjunto de sus cotas inferiores:

$$\text{CS}(A) := \{b \in \overline{\mathbb{R}} : \forall a \in A \quad a \leq b\}, \quad \text{CI}(A) := \{b \in \overline{\mathbb{R}} : \forall a \in A \quad a \geq b\}.$$

**Ejemplo.** Sea  $A = [4, 9[$ . Entonces,

## Cotas superiores y cotas inferiores (repaso)

Dado un subconjunto  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ , consideramos el conjunto de sus cotas superiores y el conjunto de sus cotas inferiores:

$$\text{CS}(A) := \{b \in \overline{\mathbb{R}} : \forall a \in A \quad a \leq b\}, \quad \text{CI}(A) := \{b \in \overline{\mathbb{R}} : \forall a \in A \quad a \geq b\}.$$

**Ejemplo.** Sea  $A = [4, 9[$ . Entonces,

$$\text{CS}(A) = [9, +\infty], \quad \text{CI}(A) = [-\infty, 4].$$

## Definiciones del supremo y del ínfimo (repaso)

**Proposición:** Para cada  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ , el conjunto  $CS(A)$  tiene un elemento mínimo.

## Definiciones del supremo y del ínfimo (repaso)

**Proposición:** Para cada  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ , el conjunto  $CS(A)$  tiene un elemento mínimo.

**Proposición:** Para cada  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ , el conjunto  $CI(A)$  tiene un elemento máximo.

## Definiciones del supremo y del ínfimo (repaso)

**Proposición:** Para cada  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ , el conjunto  $CS(A)$  tiene un elemento mínimo.

**Proposición:** Para cada  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ , el conjunto  $CI(A)$  tiene un elemento máximo.

Estas proposiciones son no triviales.

Sus demostraciones se basan en la construcción de los números reales.

## Definiciones del supremo y del ínfimo (repaso)

**Proposición:** Para cada  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ , el conjunto  $CS(A)$  tiene un elemento mínimo.

**Proposición:** Para cada  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ , el conjunto  $CI(A)$  tiene un elemento máximo.

Estas proposiciones son no triviales.

Sus demostraciones se basan en la construcción de los números reales.

**Definición.** Dado  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,

$$\sup(A) := \min(CS(A)), \quad \inf(A) := \max(CI(A)).$$



## Criterio de la desigualdad $\sup(A) \leq b$ , repaso

### Proposición

Sea  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  y sea  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Entonces,

$$\sup(A) \leq b \iff \forall a \in A \quad a \leq b.$$

## La propiedad creciente del supremo

### Lema

Sean  $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $A \subseteq B$ ,  $u \in CS(B)$ . Entonces,  $u \in CS(A)$ .

## La propiedad creciente del supremo

### Lema

Sean  $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $A \subseteq B$ ,  $u \in \text{CS}(B)$ . Entonces,  $u \in \text{CS}(A)$ .

**Demostración.** Si  $a \in A$ , entonces  $a \in B$  y  $a \leq u$ .

## La propiedad creciente del supremo

### Lema

Sean  $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $A \subseteq B$ ,  $u \in \text{CS}(B)$ . Entonces,  $u \in \text{CS}(A)$ .

**Demostración.** Si  $a \in A$ , entonces  $a \in B$  y  $a \leq u$ .

### Proposición

Sean  $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  tales que  $A \subseteq B$ . Entonces,  $\sup(A) \leq \sup(B)$ .

## La propiedad creciente del supremo

### Lema

Sean  $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $A \subseteq B$ ,  $u \in \text{CS}(B)$ . Entonces,  $u \in \text{CS}(A)$ .

**Demostración.** Si  $a \in A$ , entonces  $a \in B$  y  $a \leq u$ .

### Proposición

Sean  $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  tales que  $A \subseteq B$ . Entonces,  $\sup(A) \leq \sup(B)$ .

### Demostración.

$\sup(B) \in \text{CS}(B)$ . Luego, por el lema,  $\sup(B) \in \text{CS}(A)$ . Por eso  $\sup(A) \leq \sup(B)$ .

## La propiedad decreciente del ínfimo

### Proposición

Sean  $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  tales que  $A \subseteq B$ . Entonces,  $\inf(A) \geq \inf(B)$ .

**Ejercicio:** demostrar la proposición.

## El supremo de la unión de dos conjuntos

### Proposición

Sean  $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ . Entonces,

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

Demostración:  $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup(A), \sup(B)\}$

Consideremos el caso  $\max\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(B)$ , esto es,  $\sup(A) \leq \sup(B)$ .

El otro caso es similar.



Demostración:  $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup(A), \sup(B)\}$

Consideremos el caso  $\max\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(B)$ , esto es,  $\sup(A) \leq \sup(B)$ .

El otro caso es similar.

Dado  $x$  en  $A \cup B$ , consideremos dos casos.

Demostración:  $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup(A), \sup(B)\}$

Consideremos el caso  $\max\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(B)$ , esto es,  $\sup(A) \leq \sup(B)$ .

El otro caso es similar.

Dado  $x$  en  $A \cup B$ , consideremos dos casos.

- $x \in A$ . En este caso,  $x \leq \sup(A) \leq \sup(B)$ .
- $x \in B$ . En este caso,  $x \leq \sup(B)$ .

Demostración:  $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup(A), \sup(B)\}$

Consideremos el caso  $\max\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(B)$ , esto es,  $\sup(A) \leq \sup(B)$ .

El otro caso es similar.

Dado  $x$  en  $A \cup B$ , consideremos dos casos.

- $x \in A$ . En este caso,  $x \leq \sup(A) \leq \sup(B)$ .
- $x \in B$ . En este caso,  $x \leq \sup(B)$ .

En ambos casos,  $x \leq \sup(B)$ .

Demostración:  $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup(A), \sup(B)\}$

Consideremos el caso  $\max\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(B)$ , esto es,  $\sup(A) \leq \sup(B)$ .

El otro caso es similar.

Dado  $x$  en  $A \cup B$ , consideremos dos casos.

- $x \in A$ . En este caso,  $x \leq \sup(A) \leq \sup(B)$ .
- $x \in B$ . En este caso,  $x \leq \sup(B)$ .

En ambos casos,  $x \leq \sup(B)$ .

Hemos demostrado que  $\sup(B) \in CS(A \cup B)$ .

Demostración:  $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup(A), \sup(B)\}$

Consideremos el caso  $\max\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(B)$ , esto es,  $\sup(A) \leq \sup(B)$ .

El otro caso es similar.

Dado  $x$  en  $A \cup B$ , consideremos dos casos.

- $x \in A$ . En este caso,  $x \leq \sup(A) \leq \sup(B)$ .
- $x \in B$ . En este caso,  $x \leq \sup(B)$ .

En ambos casos,  $x \leq \sup(B)$ .

Hemos demostrado que  $\sup(B) \in CS(A \cup B)$ .

Esto implica que  $\sup(A \cup B) \leq \sup(B)$ .

Demostración:  $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup(A), \sup(B)\}$

Como  $A \subseteq A \cup B$  y  $B \subseteq A \cup B$ , por la propiedad creciente de  $\sup$  obtenemos

$$\sup(A) \leq \sup(A \cup B), \quad \sup(B) \leq \sup(A \cup B).$$

Luego  $\max\{\sup(A), \sup(B)\} \leq \sup(A \cup B)$ .

## El ínfimo de la unión de dos conjuntos

### Proposición

Sean  $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ . Entonces,

$$\inf(A \cup B) = \inf\{\inf(A), \inf(B)\}.$$

¿Qué podemos decir sobre  $\sup(A \cap B)$ ?

**Ejercicio.**

Sean  $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ . Demostrar que

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}.$$



¿Qué podemos decir sobre  $\sup(A \cap B)$ ?

**Ejercicio.**

Sean  $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ . Demostrar que

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

**Ejercicio.**

Encontrar  $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  tales que

$$\sup(A \cap B) \neq \sup(A), \quad \sup(A \cap B) \neq \sup(B).$$

¿Qué podemos decir sobre  $\sup(A \cap B)$ ?

**Ejercicio.**

Sean  $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ . Demostrar que

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

**Ejercicio.**

Encontrar  $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  tales que

$$\sup(A \cap B) \neq \sup(A), \quad \sup(A \cap B) \neq \sup(B).$$

Una versión más interesante de este ejercicio:

adicionalmente, que  $A$  sea acotado,  $B$  sea acotado, y que  $A \cap B$  sea no vacío.

$\inf(A \cup B), \inf(A \cap B)$

Enunciar y demostrar resultados similares para  $\inf(A \cup B)$  e  $\inf(A \cap B)$ .

## El supremo de la unión de una familia de conjuntos

### Proposición

Sea  $(A_j)_{j \in J}$  una familia en  $2^{\overline{\mathbb{R}}}$ , esto es,

$$\forall j \in J \quad A_j \subseteq \overline{\mathbb{R}}.$$

Pongamos  $B := \bigcup_{j \in J} A_j$ . Entonces,

$$\sup(B) = \sup\{\sup(A_j) : j \in J\}.$$

## El supremo de la unión de una familia de conjuntos

### Proposición

Sea  $(A_j)_{j \in J}$  una familia en  $2^{\overline{\mathbb{R}}}$ , esto es,

$$\forall j \in J \quad A_j \subseteq \overline{\mathbb{R}}.$$

Pongamos  $B := \bigcup_{j \in J} A_j$ . Entonces,

$$\sup(B) = \sup\{\sup(A_j) : j \in J\}.$$

Notación.  $C := \{\sup(A_j) : j \in J\}$ .

Idea de demostración:  $\sup(B) \leq \sup(C)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \quad C := \{\sup(A_j) : j \in J\}.$$

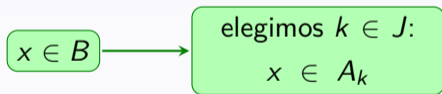
Idea de demostración:  $\sup(B) \leq \sup(C)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \quad C := \{\sup(A_j) : j \in J\}.$$

$$x \in B$$

Idea de demostración:  $\sup(B) \leq \sup(C)$

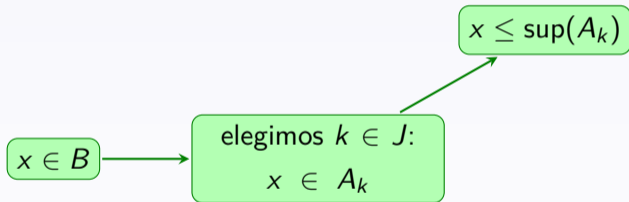
$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \quad C := \{\sup(A_j) : j \in J\}.$$





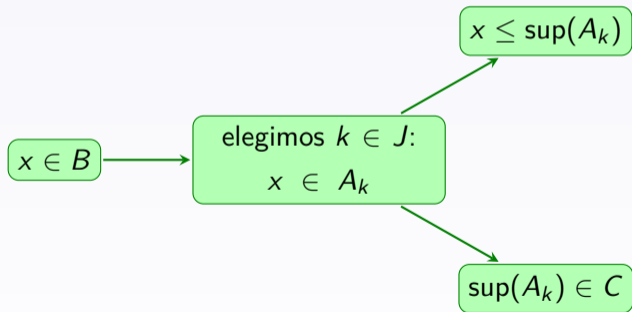
Idea de demostración:  $\sup(B) \leq \sup(C)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \quad C := \{\sup(A_j) : j \in J\}.$$



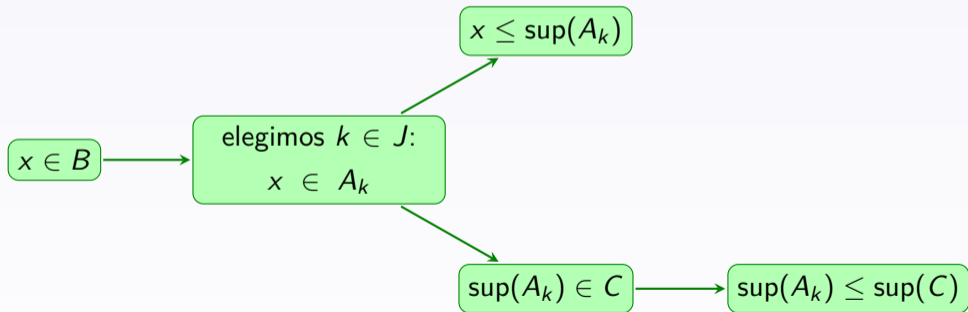
Idea de demostración:  $\sup(B) \leq \sup(C)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \quad C := \{\sup(A_j) : j \in J\}.$$



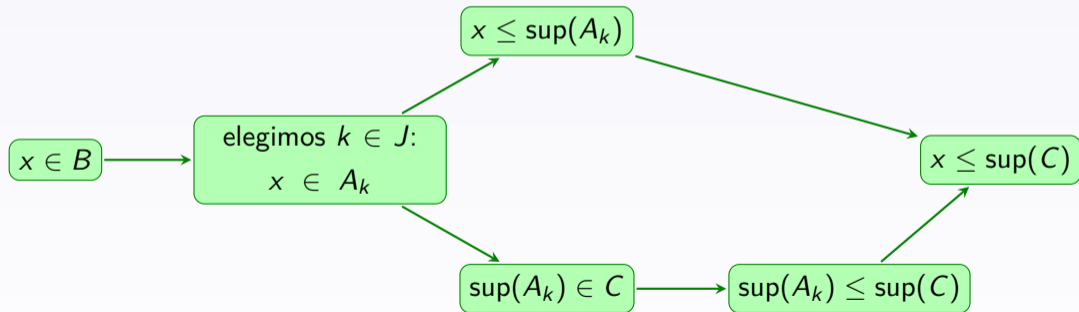
Idea de demostración:  $\sup(B) \leq \sup(C)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \quad C := \{\sup(A_j) : j \in J\}.$$



Idea de demostración:  $\sup(B) \leq \sup(C)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \quad C := \{\sup(A_j) : j \in J\}.$$



Demostración:  $\sup(C) \leq \sup(B)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \quad C := \{\sup(A_j) : j \in J\}.$$

Demostración:  $\sup(C) \leq \sup(B)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \quad C := \{\sup(A_j) : j \in J\}.$$

Si  $y \in C$ , entonces existe  $k$  en  $J$  tal que  $y = \sup(A_k)$ .

Demostración:  $\sup(C) \leq \sup(B)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \quad C := \{\sup(A_j) : j \in J\}.$$

Si  $y \in C$ , entonces existe  $k$  en  $J$  tal que  $y = \sup(A_k)$ .

Como  $A_k \subseteq B$ , obtenemos  $y \leq \sup(B)$ .

Demostración:  $\sup(C) \leq \sup(B)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \quad C := \{\sup(A_j) : j \in J\}.$$

Si  $y \in C$ , entonces existe  $k$  en  $J$  tal que  $y = \sup(A_k)$ .

Como  $A_k \subseteq B$ , obtenemos  $y \leq \sup(B)$ .

Hemos mostrado que  $\sup(B) \in CS(C)$ .



Demostración:  $\sup(C) \leq \sup(B)$

$$B := \bigcup_{j \in J} A_j, \quad C := \{\sup(A_j) : j \in J\}.$$

Si  $y \in C$ , entonces existe  $k$  en  $J$  tal que  $y = \sup(A_k)$ .

Como  $A_k \subseteq B$ , obtenemos  $y \leq \sup(B)$ .

Hemos mostrado que  $\sup(B) \in CS(C)$ .

Luego  $\sup(C) \leq \sup(B)$ .

## El ínfimo de la unión de una familia de conjuntos

### **Ejercicio.**

Sea  $(A_j)_{j \in J}$  una familia en  $2^{\overline{\mathbb{R}}}$ . Pongamos  $B := \bigcup_{j \in J} A_j$ . Demostrar que

$$\inf(B) = \inf\{\inf(A_j) : j \in J\}.$$