Desviación suprema entre dos funciones

Sean X, Y algunos espacios métricos.

Definición (desviación suprema). Sean f y g algunos mapeos $X \to Y$. La *desviación suprema entre f y g* se define como

$$\rho(f,g) \coloneqq \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

1. Ejercicio. Mostrar que ρ es una métrica (con valores en $[0, +\infty]$). En particular, el conjunto $C(X,Y)$ considerado con ρ es un espacio métrico.

2. Conjuntos acotados. Un subconjunto B de Y se llama *acotado* si

$$\sup_{y_1, y_2 \in B} d_Y(y_1, y_2) < +\infty.$$

3. Funciones acotadas. Una función $f\colon X \to Y$ se llama *acotada* si su imagen (el conjunto de sus valores) es acotada, esto es, si

$$\sup_{x_1, x_2 \in X} d_Y(f(x_1), f(x_2)) < +\infty.$$

Denotemos por $B(X,Y)$ al conjunto de todas las funciones acotadas de X a Y.

4. Ejercicio. Mostrar que $\rho(f,g) < +\infty$ para cualesquiera $f, g \in B(X,Y)$.

5. Ejercicio. Sea Y un espacio métrico completo. Mostrar que el espacio métrico $B(X,Y)$ también es completo.

En el caso cuando $Y = \mathbb{C}$ (o, en general, cuando Y es un espacio normado), la desviación suprema se expresa a través de la norma-supremo.

Definición (norma-supremo). Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$. La *norma-supremo* de f se define como

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

6. Expresar $\rho(f,g)$ a través de la norma-supremo.

7. Nota histórica. El concepto de la desviación suprema entre dos funciones (y de la norma suprema de una función) surgió en problemas de aproximación uniforme de funciones continuas por polinomios. Esta teoría fue desarrollada en trabajos de Pafnuty Chebyshóv, Sergei Bernstein, Evgeny Rémez y de otros matemáticos.