El supremo y el ínfimo de una función en un conjunto

Objetivos. Definir las nociones del supremo y del ínfimo de una función en un conjunto. Estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Eje real extendido, supremos e ínfimos, la imagen de un conjunto bajo una función.

1 Definición. Sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ y sea $A \subseteq X$. El supremo de la función f en el conjunto A, denotado por $\sup_A f$ o por $\sup_{x\in A} f(x)$, se define como el supremo del conjunto $f[A]$:

$$\sup_A f \coloneqq \sup(f[A]).$$

De manera similar,

$$\inf_A f \coloneqq \inf(f[A]).$$

2 Proposición. *Sean $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \subseteq X$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces*

$$\sup_A f \le b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in A \qquad f(x) \le b.$$

Demostración. $\Longrightarrow$. Supongamos que $\sup_A f \le b$, esto es, $\sup(f[A]) \le b$. Entonces para cada x en A tenemos $f(x) \in f[A]$ y por eso $f(x) \le \sup(f[A]) \le b$.

$\Longleftarrow$. Supongamos que para cada x en A se cumple $f(x) \le b$. Si $y \in f[A]$, entonces existe x en A tal que $y = f(x)$, luego $y \le b$. Hemos demostrado que b es una cota superior de $f[A]$. Por lo tanto, $\sup(f[A]) \le b$. $\square$

3 Proposición. *Sean $f, g\colon X \to \mathbb{R}$, $A \subseteq X$. Entonces*

$$(f+g)[A] \subseteq f[A] + g[A].$$

Demostración. Sea $y \in (f+g)[A]$. Entonces existe x en A tal que $y = (f+g)(x)$, esto es, $y = f(x) + g(x)$. Como $f(x) \in f[A]$ y $g(x) \in g[A]$, obtenemos $y \in f[A] + g[A]$. $\square$

4 Ejemplo. Sean $X = A = [0,5]$, $f(x) = x$, $g(x) = -x$. Entonces

$$f[A] = [0,5], \qquad g[A] = [-5,0], \qquad (f+g)[A] = \{0\}.$$

5 Proposición. *Sean $f, g\colon X \to \mathbb{R}$, $A \subseteq X$. Entonces*

$$\sup_A (f+g) \le \sup_A f + \sup_A g.$$

Demostración. En el caso trivial $A = \varnothing$ ambos lados son $-\infty$. Consideremos el caso $A \ne \varnothing$. Primero notamos que $(f+g)[A] \subseteq f[A] + g[A]$. Luego

$$\begin{aligned}\sup_A (f+g) &= \sup((f+g)[A]) \le \sup(f[A] + g[A]) \\ &= \sup(f[A]) + \sup(g[A]) = \sup_A f + \sup_A g.\end{aligned}$$ $\square$

6 Ejercicio. Enunciar y demostrar propiedades similares para $\inf_A f$.