El supremo y el ínfimo de un conjunto

Objetivos. Definir las nociones del supremo y del ínfimo de un conjunto y estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Eje real extendido, cotas superiores e inferiores.

El supremo de un conjunto

1 Definición (el supremo de un conjunto)**.** Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Un elemento $b \in \overline{\mathbb{R}}$ se llama *supremo* de A o *cota superior exacta* de A si b es la cota superior mínima de A, es decir, el elemento mínimo del conjunto de todas las cotas superiores de A.

2 Ejercicio (unicidad del supremo)**.** Muestre que si $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y existe un supremo de A, entonces el supremo de A es único.

3 Ejercicio (el supremo del conjunto vacío)**.** Encuentre el supremo del conjunto vacío.

4 Ejercicio (conjuntos no acotados superiormente)**.** Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Se dice que A es *no acotado superiormente* si su única cota superior es $+\infty$. ¿Cuál es el supremo de un conjunto no acotado superiormente?

Aceptamos sin demostración el siguiente hecho (que se demuestra cuando se construyen los números reales).

5 Teorema (existencia del supremo de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío acotado superiormente, sin demostración)**.** *Cualquier conjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ no vacío y acotado superiormente posée un único supremo.*

6 Corolario (existencia del supremo de cualquier subconjunto del eje real extendido)**.** *Cualquier subconjunto A de $\overline{\mathbb{R}}$ tiene un único supremo.*

Demostración. Considerar varios casos:

1. $+\infty \in A$.
2. $A \subseteq [-\infty, +\infty)$, pero A no es acotado superiormente.
3. $A = \varnothing$.
4. $A = \{-\infty\}$.
5. $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, A es acotado superiormente.

6. $A = \{-\infty\} \cup B$, donde $B \subseteq \mathbb{R}$, $B \neq \varnothing$, B es acotado superiormente.

$\square$

7 Ejercicio (descripción del supremo mediante un sistema de dos condiciones)**.** Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que $b = \sup(A)$ si, y solo si, se cumplen las siguientes dos condiciones:

1) $\forall a \in A \qquad a \leq b.$

2) $\forall c < b \qquad \exists a \in A \qquad a > c.$

bigskip

El ínfimo de un conjunto

8 Ejercicio. Escriba la definición del ínfimo (notación: inf) y análogos de las afirmaciones anteriores sobre el supremo.

9 Ejercicio. Describa el ínfimo de un conjunto mediante un sistema de dos condiciones.

Condiciones $\sup(A) \leq b$, $\inf(A) \geq b$

10 Proposición (criterio para $\sup(A) \leq b$)**.** *Sean* $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. *Entonces,*

$$\sup(A) \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \qquad a \leq b.$$

Demostración. $\Longrightarrow$. Supongamos que $\sup(A) \leq b$. Dado a en A, aplicamos el hecho que $\sup(A)$ es una cota superior de A, y luego usamos la propiedad transitiva de $\leq$:

$$a \leq \sup(A) \leq b.$$

$\Longleftarrow$. Supongamos que b es una cota superior de A. Como $\sup(A)$ es la cota superior mínima de A, obtenemos que $\sup(A) \leq b$. $\square$

11 Ejercicio (pasar al sup en desigualdades estrictas)**.** Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que

$$\forall a \in A \qquad a < b.$$

¿Qué conclusión podemos hacer acerca de $\sup(A)$ y b?. Justifique bien la respuesta.

12 Ejercicio. Enuncie y demuestre proposiciones análogas para inf.

Condiciones $\sup(A) > b$, $\inf(A) < b$

13 Ejercicio. Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\sup(A) > b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a \in A \quad a > b.$$

14 Ejercicio. Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Determine si las siguientes dos condiciones son equivalentes o no. Justifique bien la respuesta.

(a) $\sup(A) \geq b$.

(b) $\exists a \in A \quad a \geq b$.

15 Ejercicio. Enuncie y demuestre proposiciones análogas para inf.

El supremo y el ínfimo de la unión de dos conjuntos

16 Proposición. *Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Entonces,*

$$\sup(A \cup B) = \max\big\{\sup(A), \sup(B)\big\}, \qquad \inf(A \cup B) = \min\big\{\inf(A), \inf(B)\big\}.$$

La monotonía del supremo y del ínfimo

17 Proposición. *Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces,* $\sup A \leq \sup B$.

18 Proposición. *Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces,* $\inf A \geq \inf B$.