# Supremo e ínfimo de un conjunto

**Objetivos.** Definir las nociones del supremo y del ínfimo de un conjunto y estudiar sus propiedades básicas.

**Requisitos.** Eje real extendido, cotas superiores e inferiores.

## Supremo de un conjunto

**1. Definición (supremo de un conjunto).** Sea $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Un elemento $b \in \overline{\mathbb{R}}$ se llama *supremo* de $A$ o *cota superior exacta* de $A$ si $b$ es la cota superior mínima de $A$, es decir, el elemento mínimo del conjunto de todas las cotas superiores de $A$.

**2. Unicidad del supremo.** De la definición está claro que si existe un supremo de $A$, entonces es único.

**3. Supremo del conjunto vacío.** Encuentre el supremo del conjunto vacío.

**4. Conjuntos no acotados superiormente.** Un conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ se llama *no acotado superiormente* si su única cota superior es $+\infty$. ¿Cuál es el supremo de un conjunto no acotado superiormente?

**5. Existencia del supremo de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío acotado superiormente (sin demostración).** Cualquier conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ no vacío y acotado superiormente posée un único supremo.

**6. Corolario: existencia del supremo de cualquier subconjunto del eje real extendido.** Cualquier subconjunto $A$ de $\overline{\mathbb{R}}$ tiene un único supremo.

*Demostración.* Considerar varios casos:

1. $+\infty \in A$.
2. $A \subset [-\infty, +\infty)$, pero $A$ no es acotado superiormente.
3. $A = \varnothing$.
4. $A = \{-\infty\}$.
5. $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $A$ es acotado superiormente.
6. $A = \{-\infty\} \cup B$, donde $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \varnothing$, $B$ es acotado superiormente.

□

**7. Descripción del supremo mediante un sistema de dos condiciones.** Un elemento $b \in \overline{\mathbb{R}}$ es el supremo de un conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ si y sólo si se cumplen dos condiciones:

1. $\forall a \in A \qquad a \leq b$.
2. $\forall c < b \qquad \exists a \in A \qquad a > c$.

## Ínfimo de un conjunto

**8.** Escriba la definición del ínfimo (notación: inf) y los enunciados correspondientes.

**9.** Describa el ínfimo de un conjunto mediante un sistema de dos condiciones.

## “Pasar al sup o al inf en desigualdades”

**10. Proposición.** Sean $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que

$$\forall a \in A \qquad a \le b.$$

Entonces $\sup(A) \le b$.

*Demostración.* La hipótesis significa que $b$ es una cota superior de $A$. Pero $\sup(A)$ es la menor de las cotas superiores de $A$. □

**11. Proposición.** También es válida la proposición recíproca: si $\sup(A) \le b$, entonces para cualquier $a \in A$ se cumple la desigualdad $a \le b$.

**12. Criterio para $\sup(A) \le b$.** Juntando las dos proposiciones anteriores llegamos al siguiente resultado:

$$\sup(A) \le b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \qquad a \le b.$$

**13. Pasar al sup en desigualdades estrictas.** Sean $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que

$$\forall a \in A \qquad a < b.$$

¿Qué conclusión podemos hacer acerca de $\sup(A)$ y $b$?. Justifique bien la respuesta.

**14.** Enuncie y demuestre proposiciones análogas para inf.

## Condiciones $\sup(A) > b$, $\inf(A) < b$

**15.** Sean $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\sup(A) > b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a \in A \quad a > b.$$

**16.** Sean $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Determine si las siguientes dos condiciones son equivalentes o no. Justifique bien la respuesta.

(a) $\sup(A) \ge b$.

(b) $\exists a \in A \quad a \ge b$.

**17.** Enuncie y demuestre proposiciones análogas para inf.

## Supremo e ínfimo de la unión de dos conjuntos

**18.** Sean $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\sup(A \cup B) = \max\bigl\{\sup(A), \sup(B)\bigr\}, \qquad \inf(A \cup B) = \min\bigl\{\inf(A), \inf(B)\bigr\}.$$

## Monotonía del supremo y del ínfimo

**19.** Sean $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subset B$. Entonces $\sup A \leq \sup B$.

**20.** Sean $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subset B$. Entonces $\inf A \geq \inf B$.