

Supremo, ínfimo y desigualdades

Objetivos. Demostrar algunas equivalencias e implicaciones con supremos, ínfimos y desigualdades.

Requisitos. Eje real extendido, supremo de un conjunto, ínfimo de un conjunto.

En todos los siguientes ejercicios se supone que $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Demostrar que

$$\sup(A) \leq b \iff \forall a \in A \quad a \leq b.$$

2. Demostrar que

$$\sup(A) < b \implies \forall a \in A \quad a < b.$$

Con un ejemplo mostrar que la implicación \Leftarrow , en general, no es cierta.

3. En vez de ??? poner \iff o \implies o \Leftarrow y justificar:

$$\sup(A) > b \quad ??? \quad \exists a \in A \quad a > b.$$

4. En vez de ??? poner \iff o \implies o \Leftarrow y justificar:

$$\sup(A) \geq b \quad ??? \quad \exists a \in A \quad a \geq b.$$

5. En vez de ??? poner \iff o \implies o \Leftarrow y justificar:

$$\inf(A) \geq b \quad ??? \quad \forall a \in A \quad a \geq b.$$

6. En vez de ??? poner \iff o \implies o \Leftarrow y justificar:

$$\inf(A) > b \quad ??? \quad \forall a \in A \quad a > b.$$

7. En vez de ??? poner \iff o \implies o \Leftarrow y justificar:

$$\inf(A) < b \quad ??? \quad \exists a \in A \quad a < b.$$

8. En vez de ??? poner \iff o \implies o \Leftarrow y justificar:

$$\inf(A) \leq b \quad ??? \quad \exists a \in A \quad a \leq b.$$