

# El supremo, el ínfimo y las operaciones aritméticas (un tema de “Análisis Real”)

Egor Maximenko

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional  
Escuela Superior de Física y Matemáticas  
México

11 de marzo de 2021

**Objetivo:** demostrar fórmulas para

$$\sup(A + b), \quad \sup(bA), \quad \sup(A + B),$$

donde  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

**Prerrequisitos:**

- las definiciones de  $\sup$  e  $\inf$ ,
- las definiciones de  $A + \lambda$ ,  $\lambda A$ ,  $A + B$ .

## Operaciones aritméticas con conjuntos

Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ .

$$A + B := \{c \in \mathbb{R} : \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad c = a + b\},$$

$$AB := \{c \in \mathbb{R} : \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad c = ab\}.$$

## Operaciones aritméticas con conjuntos

Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ .

$$A + B := \{c \in \mathbb{R} : \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad c = a + b\},$$

$$AB := \{c \in \mathbb{R} : \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad c = ab\}.$$

También se puede usar la notación breve:

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R} : a \in A, \quad b \in A\}.$$

## Operaciones aritméticas con conjuntos

Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ .

$$A + B := \{c \in \mathbb{R} : \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad c = a + b\},$$

$$AB := \{c \in \mathbb{R} : \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad c = ab\}.$$

También se puede usar la notación breve:

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R} : a \in A, b \in A\}.$$

Es una **abreviación** de la definición verdadera escrita arriba.

## La suma de dos segmentos del eje real

### Ejercicio.

Sean  $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ ,  $p \leq q$ ,  $r \leq s$ . Demostrar que

$$[p, q] + [r, s] = [p + r, q + s].$$

## La suma de dos segmentos del eje real

### **Ejercicio.**

Sean  $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ ,  $p \leq q$ ,  $r \leq s$ . Demostrar que

$$[p, q] + [r, s] = [p + r, q + s].$$

La demostración de la contención  $\subseteq$  es simple.

## La suma de dos segmentos del eje real

### Ejercicio.

Sean  $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ ,  $p \leq q$ ,  $r \leq s$ . Demostrar que

$$[p, q] + [r, s] = [p + r, q + s].$$

La demostración de la contención  $\subseteq$  es simple.

Se recomienda demostrar la contención  $\supseteq$  de manera constructiva:

dado  $z$  en  $[p + r, q + s]$ , **construir**  $x \in [p, q]$ ,  $y \in [r, s]$  tales que  $z = x + y$ .



Sean  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces:

$$A + b := A + \{b\} = \{c \in \mathbb{R} : \exists a \in A \quad c = a + b\},$$

$$Ab := A\{b\} = \{c \in \mathbb{R} : \exists a \in A \quad c = ab\},$$

$$-A := (-1) \cdot A = \{c \in \mathbb{R} : \exists a \in A \quad c = -a\}.$$

Sean  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces:

$$A + b := A + \{b\} = \{c \in \mathbb{R}: \exists a \in A \quad c = a + b\},$$

$$Ab := A\{b\} = \{c \in \mathbb{R}: \exists a \in A \quad c = ab\},$$

$$-A := (-1) \cdot A = \{c \in \mathbb{R}: \exists a \in A \quad c = -a\}.$$

Estas definiciones se extienden al caso  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

## La suma de un conjunto y un número

$$A + b := \{c \in \overline{\mathbb{R}} : \exists a \in A \quad c = a + b\}.$$

### Proposición

Sean  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$A + b = \{c \in \overline{\mathbb{R}} : c - b \in A\}.$$

## La suma de un conjunto y un número

$$A + b := \{c \in \overline{\mathbb{R}} : \exists a \in A \quad c = a + b\}.$$

### Proposición

Sean  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$A + b = \{c \in \overline{\mathbb{R}} : c - b \in A\}.$$

$\subseteq$ . Sea  $c \in A + b$ . Entonces existe  $a$  en  $A$  tal que  $c = a + b$ .

La última igualdad implica que  $a = c - b$ . Entonces  $c - b \in A$ .

## La suma de un conjunto y un número

$$A + b := \{c \in \overline{\mathbb{R}} : \exists a \in A \quad c = a + b\}.$$

### Proposición

Sean  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$A + b = \{c \in \overline{\mathbb{R}} : c - b \in A\}.$$

$\subseteq$ . Sea  $c \in A + b$ . Entonces existe  $a$  en  $A$  tal que  $c = a + b$ .

La última igualdad implica que  $a = c - b$ . Entonces  $c - b \in A$ .

$\supseteq$ . Sea  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $c - b \in A$ .

Pongamos  $a = c - b$ . Entonces  $a \in A$  y  $c = a + b$ .

**Ejercicio.**

Sean  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Demostrar que

$$A = (A + b) + (-b).$$

## El producto de un conjunto por un número

### **Ejercicio.**

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $A \neq \emptyset$ . Demostrar que

$$A0 = \{0\}.$$

## El producto de un conjunto por un número

### Ejercicio.

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $A \neq \emptyset$ . Demostrar que

$$A0 = \{0\}.$$

### Ejercicio.

Sean  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Demostrar que

$$Ab = \left\{ c \in \mathbb{R} : \frac{c}{b} \in A \right\}.$$



Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\sup(b + A) = b + \sup(A)$ .

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\sup(b + A) = b + \sup(A)$ .

$\leq$ . Sea  $x \in b + A$ .

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\sup(b + A) = b + \sup(A)$ .

$\leq$ . Sea  $x \in b + A$ . Entonces  $x - b \in A$ .

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\sup(b + A) = b + \sup(A)$ .

$\leq$ . Sea  $x \in b + A$ . Entonces  $x - b \in A$ .

Luego  $x - b \leq \sup(A)$ .

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\sup(b + A) = b + \sup(A)$ .

$\leq$ . Sea  $x \in b + A$ . Entonces  $x - b \in A$ .

Luego  $x - b \leq \sup(A)$ . Por eso  $x \leq b + \sup(A)$ .

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\sup(b + A) = b + \sup(A)$ .

$\leq$ . Sea  $x \in b + A$ . Entonces  $x - b \in A$ .

Luego  $x - b \leq \sup(A)$ . Por eso  $x \leq b + \sup(A)$ .

Hemos mostrado que  $b + \sup(A)$  es una cota superior de  $b + A$ .

### Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\sup(b + A) = b + \sup(A)$ .

$\leq$ . Sea  $x \in b + A$ . Entonces  $x - b \in A$ .

Luego  $x - b \leq \sup(A)$ . Por eso  $x \leq b + \sup(A)$ .

Hemos mostrado que  $b + \sup(A)$  es una cota superior de  $b + A$ .

$\geq$ . Sea  $x \in A$ . Entonces  $x + b \in b + A$ .

Luego  $x + b \leq \sup(b + A)$ . Luego  $x \leq \sup(b + A) - b$ .

Hemos mostrado que  $\sup(b + A) - b$  es una cota superior de  $A$ .

$\sup(A) \leq \sup(b + A) - b$ .

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\sup(b + A) = b + \sup(A)$ .

Después de demostrar la desigualdad  $\leq$ , hay otra manera de demostrar la desigualdad  $\geq$ .



Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\sup(b + A) = b + \sup(A)$ .

Después de demostrar la desigualdad  $\leq$ , hay otra manera de demostrar la desigualdad  $\geq$ .

Pongamos  $C := b + A$ . Entonces  $A = C + (-b)$ .

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\sup(b + A) = b + \sup(A)$ .

Después de demostrar la desigualdad  $\leq$ , hay otra manera de demostrar la desigualdad  $\geq$ .

Pongamos  $C := b + A$ . Entonces  $A = C + (-b)$ .

Aplicamos la primera parte de la demostración al conjunto  $C$  y al número  $-b$ :

$$\sup(C + (-b)) \leq \sup(C) - b.$$

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\sup(b + A) = b + \sup(A)$ .

Después de demostrar la desigualdad  $\leq$ , hay otra manera de demostrar la desigualdad  $\geq$ .

Pongamos  $C := b + A$ . Entonces  $A = C + (-b)$ .

Aplicamos la primera parte de la demostración al conjunto  $C$  y al número  $-b$ :

$$\sup(C + (-b)) \leq \sup(C) - b.$$

Obtenemos  $\sup(A) \leq \sup(b + A) - b$ .

## El supremo del producto de un conjunto por un número

**Ejercicio.** Sean  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  y  $b > 0$ . Demostrar que

$$\sup(bA) = b \sup(A).$$

## El supremo del producto de un conjunto por un número

**Ejercicio.** Sean  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  y  $b > 0$ . Demostrar que

$$\sup(bA) = b \sup(A).$$

**Ejercicio.** Sea  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ . Demostrar que

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

## El supremo del producto de un conjunto por un número

**Ejercicio.** Sean  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  y  $b > 0$ . Demostrar que

$$\sup(bA) = b \sup(A).$$

**Ejercicio.** Sea  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ . Demostrar que

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

**Ejercicio.** Sean  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  y  $b < 0$ . Demostrar que

$$\sup(bA) = b \inf(A).$$

### Teorema (sobre el supremo de la suma de dos conjuntos)

Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$ . Entonces

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Demostración:  $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$

Sea  $c \in A + B$ .



Demostración:  $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$

Sea  $c \in A + B$ .

Encontramos  $a \in A$ ,  $b \in B$  tales que  $c = a + b$ .

Demostración:  $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$

Sea  $c \in A + B$ .

Encontramos  $a \in A$ ,  $b \in B$  tales que  $c = a + b$ .

Como  $a \leq \sup(A)$ ,  $b \leq \sup(B)$ , obtenemos  $c \leq \sup(A) + \sup(B)$ .

Demostración:  $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$

Sea  $c \in A + B$ .

Encontramos  $a \in A$ ,  $b \in B$  tales que  $c = a + b$ .

Como  $a \leq \sup(A)$ ,  $b \leq \sup(B)$ , obtenemos  $c \leq \sup(A) + \sup(B)$ .

Hemos motrado que  $\sup(A) + \sup(B) \in \text{CS}(A + B)$ .

Demostración:  $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$

Sea  $c \in A + B$ .

Encontramos  $a \in A$ ,  $b \in B$  tales que  $c = a + b$ .

Como  $a \leq \sup(A)$ ,  $b \leq \sup(B)$ , obtenemos  $c \leq \sup(A) + \sup(B)$ .

Hemos mostrado que  $\sup(A) + \sup(B) \in CS(A + B)$ .

Por lo tanto,  $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$ .

Demostración de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , caso  $\sup(A) = +\infty$

Usando la hipótesis  $B \neq \emptyset$  elegimos  $b_0 \in B$ .

Demostración de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , caso  $\sup(A) = +\infty$

Usando la hipótesis  $B \neq \emptyset$  elegimos  $b_0 \in B$ .

$$\sup(A + B) \geq \sup(A + \{b_0\}) = \sup(A + b_0) = b_0 + \sup(A) = +\infty.$$

Primera dem. de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , el caso principal

$p := \sup(A)$ ,  $q := \sup(B)$ . Consideremos el caso, cuando  $p, q \in \mathbb{R}$ .

Primera dem. de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , el caso principal

$p := \sup(A)$ ,  $q := \sup(B)$ . Consideremos el caso, cuando  $p, q \in \mathbb{R}$ .

Sea  $\varepsilon > 0$



Primera dem. de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , el caso principal

$p := \sup(A)$ ,  $q := \sup(B)$ . Consideremos el caso, cuando  $p, q \in \mathbb{R}$ .

$$p - \frac{\varepsilon}{2} \notin \text{CS}(A)$$

Sea  $\varepsilon > 0$

Primera dem. de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , el caso principal

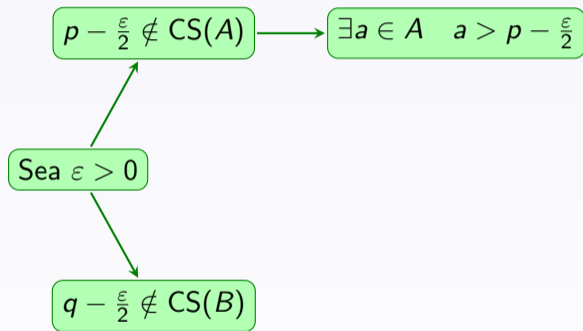
$p := \sup(A)$ ,  $q := \sup(B)$ . Consideremos el caso, cuando  $p, q \in \mathbb{R}$ .

$$p - \frac{\varepsilon}{2} \notin \text{CS}(A) \longrightarrow \exists a \in A \quad a > p - \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea  $\varepsilon > 0$

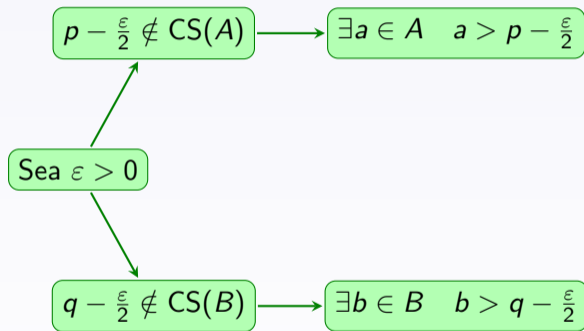
Primera dem. de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , el caso principal

$p := \sup(A)$ ,  $q := \sup(B)$ . Consideremos el caso, cuando  $p, q \in \mathbb{R}$ .



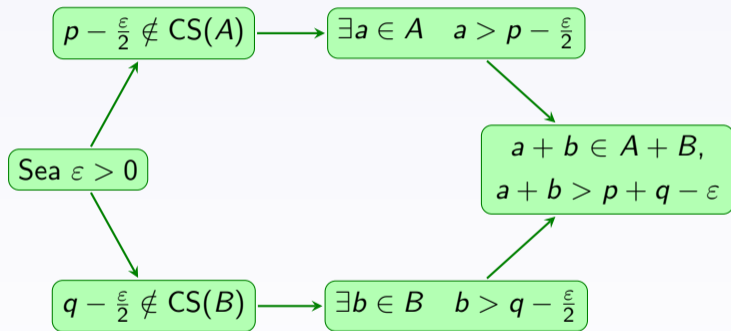
Primera dem. de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , el caso principal

$p := \sup(A)$ ,  $q := \sup(B)$ . Consideremos el caso, cuando  $p, q \in \mathbb{R}$ .



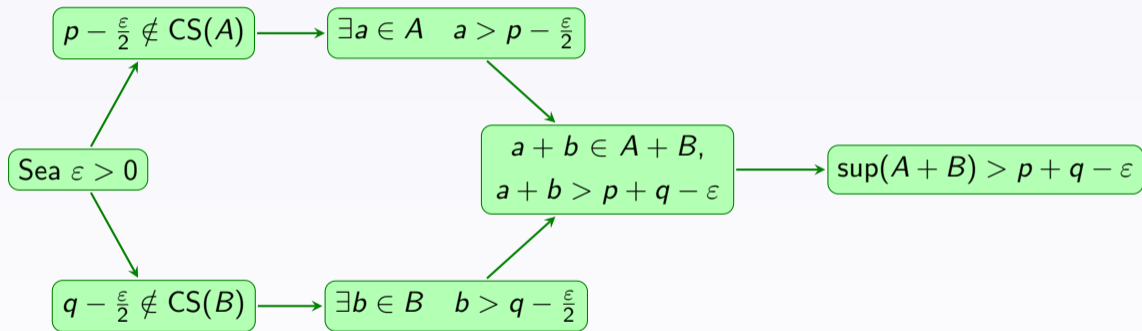
Primera dem. de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , el caso principal

$p := \sup(A)$ ,  $q := \sup(B)$ . Consideremos el caso, cuando  $p, q \in \mathbb{R}$ .



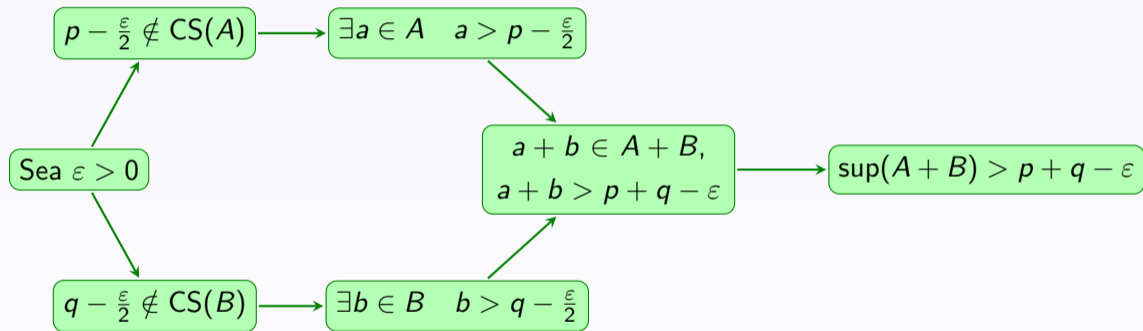
Primera dem. de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , el caso principal

$p := \sup(A)$ ,  $q := \sup(B)$ . Consideremos el caso, cuando  $p, q \in \mathbb{R}$ .



Primera dem. de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , el caso principal

$p := \sup(A)$ ,  $q := \sup(B)$ . Consideremos el caso, cuando  $p, q \in \mathbb{R}$ .



Como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, concluimos que  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ .

Segunda dem. de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , el caso principal

Supongamos que  $\sup(A) < +\infty$ .



Segunda dem. de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , el caso principal

Supongamos que  $\sup(A) < +\infty$ .

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a = (a + b) - b \leq \sup(A + B) - b.$$

Segunda dem. de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , el caso principal

Supongamos que  $\sup(A) < +\infty$ .

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a = (a + b) - b \leq \sup(A + B) - b.$$

$$\forall b \in B \quad \left( \forall a \in A \quad a \leq \sup(A + B) - b \right).$$

Segunda dem. de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , el caso principal

Supongamos que  $\sup(A) < +\infty$ .

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a = (a + b) - b \leq \sup(A + B) - b.$$

$$\forall b \in B \quad \left( \forall a \in A \quad a \leq \sup(A + B) - b \right).$$

$$\forall b \in B \quad \sup(A) \leq \sup(A + B) - b.$$

Segunda dem. de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , el caso principal

Supongamos que  $\sup(A) < +\infty$ .

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a = (a + b) - b \leq \sup(A + B) - b.$$

$$\forall b \in B \quad \left( \forall a \in A \quad a \leq \sup(A + B) - b \right).$$

$$\forall b \in B \quad \sup(A) \leq \sup(A + B) - b.$$

$$\forall b \in B \quad b \leq \sup(A + B) - \sup(A).$$

Segunda dem. de  $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$ , el caso principal

Supongamos que  $\sup(A) < +\infty$ .

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a = (a + b) - b \leq \sup(A + B) - b.$$

$$\forall b \in B \quad \left( \forall a \in A \quad a \leq \sup(A + B) - b \right).$$

$$\forall b \in B \quad \sup(A) \leq \sup(A + B) - b.$$

$$\forall b \in B \quad b \leq \sup(A + B) - \sup(A).$$

$$\sup(B) \leq \sup(A + B) - \sup(A).$$

## **Ejercicio.**

Enunciar y demostrar propiedades similares del ínfimo.

**Ejercicio.**

Enunciar y demostrar propiedades similares del ínfimo.

Algunas propiedades del ínfimo salen fácilmente de propiedades del supremo, usando

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

Este camino estará prohibido en el examen.