El supremo, el ínfimo y las operaciones aritméticas (un tema de “Análisis Real”)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

11 de marzo de 2021

Objetivo: demostrar fórmulas para

$$\sup(A+b), \qquad \sup(bA), \qquad \sup(A+B),$$

donde $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Prerrequisitos:

- las definiciones de sup e inf,
- las definiciones de $A+\lambda$, λA, $A+B$.

Operaciones aritméticas con conjuntos

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} A + B &:= \{c \in \mathbb{R}\colon \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad c = a + b\}, \\ AB &:= \{c \in \mathbb{R}\colon \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad c = ab\}. \end{aligned}$$

Operaciones aritméticas con conjuntos

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
A + B &:= \{c \in \mathbb{R} \colon \qquad \exists a \in A \qquad \exists b \in B \qquad c = a + b\}, \\
AB &:= \{c \in \mathbb{R} \colon \qquad \exists a \in A \qquad \exists b \in B \qquad \quad c = ab\}.
\end{aligned}
$$

También se puede usar la notación breve:

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R} \colon \quad a \in A, \quad b \in A\}.$$

Operaciones aritméticas con conjuntos

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
A + B &:= \{c \in \mathbb{R}\colon \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad c = a + b\},\\
AB &:= \{c \in \mathbb{R}\colon \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad c = ab\}.
\end{aligned}
$$

También se puede usar la notación breve:

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R}\colon \quad a \in A, \quad b \in A\}.$$

Es una abreviación de la definición verdadera escrita arriba.

La suma de dos segmentos del eje real

Ejercicio.

Sean $p, q, r, s \in \mathbb{R}, \quad p \leq q, \quad r \leq s.$ Demostrar que

$$[p, q] + [r, s] = [p + r, q + s].$$

La suma de dos segmentos del eje real

Ejercicio.

Sean $p, q, r, s \in \mathbb{R}, \quad p \le q, \quad r \le s.$ Demostrar que

$$[p, q] + [r, s] = [p + r, q + s].$$

La demostración de la contención $\subseteq$ es simple.

La suma de dos segmentos del eje real

Ejercicio.

Sean $p, q, r, s \in \mathbb{R}, \quad p \leq q, \quad r \leq s.$ Demostrar que

$$[p, q] + [r, s] = [p + r, q + s].$$

La demostración de la contención $\subseteq$ es simple.

Se recomienda demostrar la contención $\supseteq$ de manera constructiva:

dado z en $[p + r, q + s]$, construir $x \in [p, q]$, $y \in [r, s]$ tales que $z = x + y$.

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$A + b := A + \{b\} = \{c \in \mathbb{R}\colon \quad \exists a \in A \quad c = a + b\},$$

$$Ab := A\{b\} = \{c \in \mathbb{R}\colon \quad \exists a \in A \quad c = ab\},$$

$$-A := (-1) \cdot A = \{c \in \mathbb{R}\colon \quad \exists a \in A \quad c = -a\}.$$

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$A + b := A + \{b\} = \{c \in \mathbb{R} : \quad \exists a \in A \quad c = a + b\},$$

$$Ab := A\{b\} = \{c \in \mathbb{R} : \quad \exists a \in A \quad c = ab\},$$

$$-A := (-1) \cdot A = \{c \in \mathbb{R} : \quad \exists a \in A \quad c = -a\}.$$

Estas definiciones se extienden al caso $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$.

La suma de un conjunto y un número

$$A + b := \{c \in \overline{\mathbb{R}} : \quad \exists a \in A \quad c = a + b\}.$$

Proposición

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. *Entonces*

$$A + b = \{c \in \overline{\mathbb{R}} : \quad c - b \in A\}.$$

La suma de un conjunto y un número

$$A + b := \{c \in \overline{\mathbb{R}}\colon \quad \exists a \in A \quad c = a + b\}.$$

Proposición

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$A + b = \{c \in \overline{\mathbb{R}}\colon \quad c - b \in A\}.$$

$\subseteq$. Sea $c \in A + b$. Entonces existe a en A tal que $c = a + b$.

La última igualdad implica que $a = c - b$. Entonces $c - b \in A$.

La suma de un conjunto y un número

$$A + b := \{c \in \overline{\mathbb{R}} \colon \quad \exists a \in A \quad c = a + b\}.$$

Proposición

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$A + b = \{c \in \overline{\mathbb{R}} \colon \quad c - b \in A\}.$$

$\subseteq$. Sea $c \in A + b$. Entonces existe a en A tal que $c = a + b$.

La última igualdad implica que $a = c - b$. Entonces $c - b \in A$.

$\supseteq$. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $c - b \in A$.

Pongamos $a = c - b$. Entonces $a \in A$ y $c = a + b$.

Ejercicio.

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$A = (A + b) + (-b).$$

El producto de un conjunto por un número

Ejercicio.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$. Demostrar que

$$A\,0 = \{0\}.$$

El producto de un conjunto por un número

Ejercicio.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$. Demostrar que

$$A\,0 = \{0\}.$$

Ejercicio.

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$Ab = \left\{ c \in \mathbb{R}\colon \quad \frac{c}{b} \in A \right\}.$$

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\sup(b + A) = b + \sup(A)$.

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\sup(b + A) = b + \sup(A)$.

$\leq$. Sea $x \in b + A$.

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\sup(b + A) = b + \sup(A)$.

$\leq$. Sea $x \in b + A$. Entonces $x - b \in A$.

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\sup(b + A) = b + \sup(A)$.

$\leq$. Sea $x \in b + A$. Entonces $x - b \in A$.

Luego $x - b \leq \sup(A)$.

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\sup(b + A) = b + \sup(A)$.

$\le$. Sea $x \in b + A$. Entonces $x - b \in A$.

Luego $x - b \le \sup(A)$. Por eso $x \le b + \sup(A)$.

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\sup(b + A) = b + \sup(A)$.

$\leq$. Sea $x \in b + A$. Entonces $x - b \in A$.

Luego $x - b \leq \sup(A)$. Por eso $x \leq b + \sup(A)$.

Hemos mostrado que $b + \sup(A)$ es una cota superior de $b + A$.

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\sup(b + A) = b + \sup(A)$.

$\le$. Sea $x \in b + A$. Entonces $x - b \in A$.

Luego $x - b \le \sup(A)$. Por eso $x \le b + \sup(A)$.

Hemos mostrado que $b + \sup(A)$ es una cota superior de $b + A$.

$\ge$. Sea $x \in A$. Entonces $x + b \in b + A$.

Luego $x + b \le \sup(b + A)$. Luego $x \le \sup(b + A) - b$.

Hemos mostrado que $\sup(b + A) - b$ es una cota superior de A.

$\sup(A) \le \sup(b + A) - b$.

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\sup(b + A) = b + \sup(A)$.

Después de demostrar la desigualdad $\le$, hay otra manera de demostrar la desigualdad $\ge$.

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\sup(b + A) = b + \sup(A)$.

Después de demostrar la desigualdad $\le$, hay otra manera de demostrar la desigualdad $\ge$.

Pongamos $C := b + A$. Entonces $A = C + (-b)$.

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\sup(b + A) = b + \sup(A)$.

Después de demostrar la desigualdad $\le$, hay otra manera de demostrar la desigualdad $\ge$.

Pongamos $C := b + A$. Entonces $A = C + (-b)$.

Aplicamos la primera parte de la demostración al conjunto C y al número $-b$:

$$\sup(C + (-b)) \le \sup(C) - b.$$

Proposición (el supremo de la suma de un conjunto con un número)

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\sup(b + A) = b + \sup(A)$.

Después de demostrar la desigualdad $\le$, hay otra manera de demostrar la desigualdad $\ge$.

Pongamos $C := b + A$. Entonces $A = C + (-b)$.

Aplicamos la primera parte de la demostración al conjunto C y al número $-b$:

$$\sup(C + (-b)) \le \sup(C) - b.$$

Obtenemos $\sup(A) \le \sup(b + A) - b$.

El supremo del producto de un conjunto por un número

Ejercicio. Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b > 0$. Demostrar que

$$\sup(bA) = b \sup(A).$$

El supremo del producto de un conjunto por un número

Ejercicio. Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b > 0$. Demostrar que

$$\sup(bA) = b\sup(A).$$

Ejercicio. Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Demostrar que

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

El supremo del producto de un conjunto por un número

Ejercicio. Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b > 0$. Demostrar que

$$\sup(bA) = b \sup(A).$$

Ejercicio. Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Demostrar que

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

Ejercicio. Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b < 0$. Demostrar que

$$\sup(bA) = b \inf(A).$$

Teorema (sobre el supremo de la suma de dos conjuntos)

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. *Entonces*

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Demostración: $\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$

Sea $c \in A + B$.

Demostración: $\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$

Sea $c \in A + B$.

Encontramos $a \in A$, $b \in B$ tales que $c = a + b$.

Demostración: $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$

Sea $c \in A + B$.

Encontramos $a \in A$, $b \in B$ tales que $c = a + b$.

Como $a \leq \sup(A)$, $b \leq \sup(B)$, obtenemos $c \leq \sup(A) + \sup(B)$.

Demostración: $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$

Sea $c \in A + B$.

Encontramos $a \in A$, $b \in B$ tales que $c = a + b$.

Como $a \leq \sup(A)$, $b \leq \sup(B)$, obtenemos $c \leq \sup(A) + \sup(B)$.

Hemos motrado que $\sup(A) + \sup(B) \in \mathrm{CS}(A + B)$.

Demostración: $\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$

Sea $c \in A + B$.

Encontramos $a \in A$, $b \in B$ tales que $c = a + b$.

Como $a \leq \sup(A)$, $b \leq \sup(B)$, obtenemos $c \leq \sup(A) + \sup(B)$.

Hemos motrado que $\sup(A) + \sup(B) \in \mathrm{CS}(A + B)$.

Por lo tanto, $\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

Demostración de $\sup(A+B) \geq \sup(A)+\sup(B)$, caso $\sup(A)=+\infty$

Usando la hipótesis $B \neq \emptyset$ elegimos $b_0 \in B$.

Demostración de $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$, caso $\sup(A) = +\infty$

Usando la hipótesis $B \neq \emptyset$ elegimos $b_0 \in B$.

$$\sup(A+B) \geq \sup(A+\{b_0\}) = \sup(A+b_0) = b_0 + \sup(A) = +\infty.$$

Primera dem. de $\sup(A+B) \ge \sup(A)+\sup(B)$, el caso principal

$p := \sup(A)$, $q := \sup(B)$. Consideremos el caso, cuando $p, q \in \mathbb{R}$.

Primera dem. de $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$, el caso principal

$p := \sup(A)$, $q := \sup(B)$. Consideremos el caso, cuando $p, q \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Sea } \varepsilon > 0}$

Primera dem. de $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$, el caso principal

$p := \sup(A)$, $q := \sup(B)$. Consideremos el caso, cuando $p, q \in \mathbb{R}$.

$p - \frac{\varepsilon}{2} \notin \mathrm{CS}(A)$

Sea $\varepsilon > 0$

Primera dem. de $\quad \sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B), \quad$ el caso principal

$p := \sup(A)$, $q := \sup(B)$. Consideremos el caso, cuando $p, q \in \mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{p - \frac{\varepsilon}{2} \notin \mathrm{CS}(A)} \arrow[r] & \boxed{\exists a \in A \quad a > p - \frac{\varepsilon}{2}} \\
\boxed{\text{Sea } \varepsilon > 0} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Primera dem. de $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$, el caso principal

$p := \sup(A)$, $q := \sup(B)$. Consideremos el caso, cuando $p, q \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{p - \frac{\varepsilon}{2} \notin \mathrm{CS}(A)} \arrow[r] & \boxed{\exists a \in A \quad a > p - \frac{\varepsilon}{2}} \\
\boxed{\text{Sea } \varepsilon > 0} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & \boxed{q - \frac{\varepsilon}{2} \notin \mathrm{CS}(B)} &
\end{tikzcd}
$$

Primera dem. de $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$, el caso principal

$p := \sup(A)$, $q := \sup(B)$. Consideremos el caso, cuando $p, q \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & p - \frac{\varepsilon}{2} \notin \mathrm{CS}(A) \arrow[r] & \exists a \in A \quad a > p - \frac{\varepsilon}{2} \\
\text{Sea } \varepsilon > 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & q - \frac{\varepsilon}{2} \notin \mathrm{CS}(B) \arrow[r] & \exists b \in B \quad b > q - \frac{\varepsilon}{2}
\end{tikzcd}
$$

Primera dem. de $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$, el caso principal

$p := \sup(A)$, $q := \sup(B)$. Consideremos el caso, cuando $p, q \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & p - \frac{\varepsilon}{2} \notin \mathrm{CS}(A) \arrow[r] & \exists a \in A \quad a > p - \frac{\varepsilon}{2} \arrow[dr] & \\
\text{Sea } \varepsilon > 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \begin{array}{c} a + b \in A + B, \\ a + b > p + q - \varepsilon \end{array} \\
 & q - \frac{\varepsilon}{2} \notin \mathrm{CS}(B) \arrow[r] & \exists b \in B \quad b > q - \frac{\varepsilon}{2} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Primera dem. de $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$, el caso principal

$p := \sup(A)$, $q := \sup(B)$. Consideremos el caso, cuando $p, q \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{p - \frac{\varepsilon}{2} \notin \mathrm{CS}(A)} \arrow[r] & \boxed{\exists a \in A \quad a > p - \frac{\varepsilon}{2}} \arrow[dr] & & \\
\boxed{\text{Sea } \varepsilon > 0} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \boxed{\begin{array}{c} a + b \in A + B, \\ a + b > p + q - \varepsilon \end{array}} \arrow[r] & \boxed{\sup(A+B) > p + q - \varepsilon} \\
 & \boxed{q - \frac{\varepsilon}{2} \notin \mathrm{CS}(B)} \arrow[r] & \boxed{\exists b \in B \quad b > q - \frac{\varepsilon}{2}} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Primera dem. de $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$, el caso principal

$p := \sup(A)$, $q := \sup(B)$. Consideremos el caso, cuando $p, q \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & p - \frac{\varepsilon}{2} \notin \mathrm{CS}(A) \arrow[r] & \exists a \in A \quad a > p - \frac{\varepsilon}{2} \arrow[dr] & & \\
\text{Sea } \varepsilon > 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \begin{array}{c} a + b \in A + B, \\ a + b > p + q - \varepsilon \end{array} \arrow[r] & \sup(A+B) > p + q - \varepsilon \\
 & q - \frac{\varepsilon}{2} \notin \mathrm{CS}(B) \arrow[r] & \exists b \in B \quad b > q - \frac{\varepsilon}{2} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$.

Segunda dem. de $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$, el caso principal

Supongamos que $\sup(A) < +\infty$.

Segunda dem. de $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$, el caso principal

Supongamos que $\sup(A) < +\infty$.

$$\forall a \in A \qquad \forall b \in B \qquad a = (a+b) - b \leq \sup(A+B) - b.$$

Segunda dem. de $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$, el caso principal

Supongamos que $\sup(A) < +\infty$.

$$\forall a \in A \qquad \forall b \in B \qquad a = (a+b) - b \leq \sup(A+B) - b.$$

$$\forall b \in B \qquad \Big(\forall a \in A \qquad a \leq \sup(A+B) - b\Big).$$

Segunda dem. de $\sup(A+B) \ge \sup(A) + \sup(B)$, el caso principal

Supongamos que $\sup(A) < +\infty$.

$$\forall a \in A \qquad \forall b \in B \qquad a = (a+b) - b \le \sup(A+B) - b.$$

$$\forall b \in B \qquad \Big(\forall a \in A \qquad a \le \sup(A+B) - b\Big).$$

$$\forall b \in B \qquad \sup(A) \le \sup(A+B) - b.$$

Segunda dem. de $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$, el caso principal

Supongamos que $\sup(A) < +\infty$.

$$\forall a \in A \qquad \forall b \in B \qquad a = (a+b) - b \leq \sup(A+B) - b.$$

$$\forall b \in B \qquad \Big(\forall a \in A \qquad a \leq \sup(A+B) - b\Big).$$

$$\forall b \in B \qquad \sup(A) \leq \sup(A+B) - b.$$

$$\forall b \in B \qquad b \leq \sup(A+B) - \sup(A).$$

Segunda dem. de $\sup(A+B) \ge \sup(A) + \sup(B)$, el caso principal

Supongamos que $\sup(A) < +\infty$.

$$\forall a \in A \qquad \forall b \in B \qquad a = (a+b) - b \le \sup(A+B) - b.$$

$$\forall b \in B \qquad \Big(\forall a \in A \qquad a \le \sup(A+B) - b\Big).$$

$$\forall b \in B \qquad \sup(A) \le \sup(A+B) - b.$$

$$\forall b \in B \qquad b \le \sup(A+B) - \sup(A).$$

$$\sup(B) \le \sup(A+B) - \sup(A).$$

Ejercicio.

Enunciar y demostrar propiedades similares del ínfimo.

Ejercicio.

Enunciar y demostrar propiedades similares del ínfimo.

Algunas propiedades del ínfimo salen fácilmente de propiedades del supremo, usando

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

Este camino estará prohibido en el examen.