Supremo, ínfimo y operaciones aritméticas

Objetivos. Definir las nociones del supremo y del ínfimo de un conjunto y estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Eje real extendido, cotas superiores e inferiores.

Supremo de un conjunto (repaso)

1. Sea $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Repase la definición del supremo de A.

2. Sea $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Repase la definición del ínfimo de A.

Operaciones aritméticas con conjuntos

3. Definición (operaciones aritméticas con conjuntos). Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned} A + B &\coloneqq \{c \in \mathbb{R}\colon \exists a \in A,\ \exists b \in B \quad \text{tales que} \quad c = a + b\}, \\ AB &\coloneqq \{c \in \mathbb{R}\colon \exists a \in A,\ \exists b \in B \quad \text{tales que} \quad c = ab\}. \end{aligned}$$

Sean $A \subset \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned} A + b = b + A &\coloneqq A + \{b\} = \{c \in \mathbb{R}\colon \exists a \in A \quad \text{tal que} \quad c = a + b\}, \\ Ab = bA &\coloneqq A\{b\} = \{c \in \mathbb{R}\colon \exists a \in A \quad \text{tal que} \quad c = ab\}, \\ -A &\coloneqq (-1) \cdot A = \{c \in \mathbb{R}\colon \exists a \in A \quad \text{tal que} \quad c = -a\}. \end{aligned}$$

Propiedades aritméticas del supremo

4. Proposición. Sean $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \mathbb{R}$. Entonces $\sup(b + A) = b + \sup(A)$.

5. Proposición. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $b > 0$. Entonces $\sup(bA) = b \sup(A)$.

6. Proposición. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Entonces $\sup(-A) = -\inf(A)$.

7. Proposición. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $b < 0$. Entonces $\sup(bA) = b \inf(A)$.

8. Teorema (sobre el supremo de la suma de dos conjuntos). Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Entonces $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Demostración más explícita. Si $c \in A + B$, entonces existen $a \in A$, $b \in B$ tales que $c = a + b$. Entonces $c \leq \sup(A) + \sup(B)$. Acabamos de demostrar que $\sup(A) + \sup(B)$ es una cota superior del conjunto $A + B$. Por lo tanto, $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

La otra parte es más interesante. Notemos que $\sup(A), \sup(B) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Consideremos solamente el caso cuando $\sup(A), \sup(B) \in \mathbb{R}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que $\sup(A) - \varepsilon/2$ no es cota superior de A, por eso existe $a \in A$ tal que $a > \sup(A) - \varepsilon/2$. De manera similar, existe $b \in B$ tal que $b > \sup(B) - \varepsilon/2$. Sumando estas dos desigualdades obtenemos $a + b > \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$. Pero $a + b \in A + B$. Entonces $\sup(A + B) > \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$. Como $\varepsilon >$ es arbitrario, concluimos que $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$. $\square$

Demostración más floja. La primera parte es la misma: es fácil ver que $\sup(A) + \sup(B)$ es una cota superior del conjunto $A + B$. Por lo tanto, $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

Demostremos la desigualdad inversa. Consideremos primero el caso $\sup(B) = +\infty$. Usando la hipótesis que $A \neq \varnothing$ eligimos algún $a_0 \in A$ y obtenemos

$$\sup(A + B) \geq \sup(a_0 + B) = a_0 + \sup(B) = +\infty.$$

Ahora supongamos que $\sup(B) < +\infty$. Para cualesquier $a \in A$, $b \in B$, tenemos

$$b = (a + b) - a \leq \sup(A + B) - a.$$

Fijamos a. Como $b \in B$ es arbitrario,

$$\sup(A + B) - a \in \mathrm{CS}(B).$$

Entonces

$$\sup(B) \leq \sup(A + B) - a.$$

Pasamos a y $\sup(B)$ a otros lados:

$$a \leq \sup(A + B) - \sup(B).$$

Esto significa que $\sup(A + B) - \sup(B)$ es una cota superior del conjunto A. Por lo tanto,

$$\sup(A) \leq \sup(A + B) - \sup(B).$$

Movemos el sumando $\sup(B)$ al otro lado: $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A + B)$. $\square$

9. Ejercicio. Enuncie y demuestre propiedades similares del ínfimo.