# Supremo, ínfimo y operaciones aritméticas

**Objetivos.** Definir las nociones del supremo y del ínfimo de un conjunto y estudiar sus propiedades básicas.

**Requisitos.** Eje real extendido, cotas superiores e inferiores.

## Supremo de un conjunto (repaso)

**1 Ejercicio.** Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Repasar la definición del supremo de $A$.

**2 Ejercicio.** Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Repase la definición del ínfimo de $A$.

## Operaciones aritméticas con conjuntos

**3 Definición** (operaciones aritméticas con conjuntos)**.** Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned} A + B &\coloneqq \{c \in \mathbb{R} \colon \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad c = a + b\}, \\ AB &\coloneqq \{c \in \mathbb{R} \colon \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \qquad c = ab\}. \end{aligned}$$

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned} A + b &\coloneqq A + \{b\} = \{c \in \mathbb{R} \colon \quad \exists a \in A \quad c = a + b\}, \\ Ab &\coloneqq A\{b\} = \{c \in \mathbb{R} \colon \quad \exists a \in A \quad c = ab\}, \\ -A &\coloneqq (-1) \cdot A = \{c \in \mathbb{R} \colon \quad \exists a \in A \quad c = -a\}. \end{aligned}$$

El conjunto $b + A$ se define de la misma manera que $A + b$, y el conjunto $bA$ se define de la misma manera que $Ab$.

**4 Observación.** Algunas de las definiciones anteriores se pueden extender al caso $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$, pero hay que evitar la situación cuando aparece $-\infty + \infty$.

**5 Proposición.** *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$A + b = \{c \in \mathbb{R} \colon \quad c - b \in A\}.$$

*Demostración.* $\subseteq$. Sea $c \in A + b$. Entonces existe $a$ en $A$ tal que $c = a + b$. La última igualdad implica que $a = c - b$. Entonces $c - b \in A$.

$\supseteq$. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $c - b \in A$. Pongamos $a = c - b$. Entonces $a \in A$ y $c = a + b$. $\square$

**6 Proposición.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$. Entonces*

$$A\{0\} = \{0\}.$$

*Demostración.* Dejamos esta demostración como un ejercicio. □

**7 Proposición.** *Sean* $A \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Entonces*

$$Ab = \left\{ c \in \mathbb{R} \colon \quad \frac{c}{b} \in A \right\}.$$

*Demostración.* Similar a la demostración de la Proposición 5. □

Las Proposiciones 5 y 7 permiten trabajar con $A + b$ y $Ab$ evitando el cuantificador $\exists$.

## Propiedades aritméticas del supremo

**8 Proposición.** *Sean* $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ *y* $b \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\sup(b + A) = b + \sup(A)$.

**9 Proposición.** *Sean* $A \subseteq \mathbb{R}$ *y* $b > 0$. *Entonces* $\sup(bA) = b \sup(A)$.

**10 Proposición.** *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$. *Entonces* $\sup(-A) = -\inf(A)$.

**11 Proposición.** *Sean* $A \subseteq \mathbb{R}$ *y* $b < 0$. *Entonces* $\sup(bA) = b \inf(A)$.

Dejamos las demostraciones como ejercicios.

**12 Teorema** (sobre el supremo de la suma de dos conjuntos)**.** *Sean* $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. *Entonces* $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

*Demostración de* $\le$. Si $c \in A + B$, entonces existen $a \in A$, $b \in B$ tales que $c = a + b$. Entonces $c \le \sup(A) + \sup(B)$. Acabamos de demostrar que $\sup(A) + \sup(B)$ es una cota superior del conjunto $A + B$. Por lo tanto, $\sup(A + B) \le \sup(A) + \sup(B)$. □

*Primera demostración de* $\ge$. Notemos que $\sup(A), \sup(B) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Consideremos solamente el caso cuando $\sup(A), \sup(B) \in \mathbb{R}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que $\sup(A) - \varepsilon/2$ no es cota superior de $A$, por eso existe $a \in A$ tal que $a > \sup(A) - \varepsilon/2$. De manera similar, existe $b \in B$ tal que $b > \sup(B) - \varepsilon/2$. Sumando estas dos desigualdades obtenemos $a + b > \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$. Pero $a + b \in A + B$. Entonces $\sup(A + B) > \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$. Como $\varepsilon >$ es arbitrario, concluimos que $\sup(A + B) \ge \sup(A) + \sup(B)$. □

*Segunda demostración de* $\ge$. Consideremos primero el caso $\sup(B) = +\infty$. Usando la hipótesis que $A \neq \varnothing$ eligimos algún $a_0 \in A$ y obtenemos

$$\sup(A + B) \ge \sup(a_0 + B) = a_0 + \sup(B) = +\infty.$$

Ahora supongamos que $\sup(B) < +\infty$. Para cualesquier $a \in A$, $b \in B$, tenemos

$$b = (a + b) - a \le \sup(A + B) - a.$$

Fijamos $a$. Como $b \in B$ es arbitrario,

$$\sup(A+B) - a \in \mathrm{CS}(B).$$

Entonces

$$\sup(B) \leq \sup(A+B) - a.$$

Pasamos $a$ y $\sup(B)$ a otros lados:

$$a \leq \sup(A+B) - \sup(B).$$

Esto significa que $\sup(A+B) - \sup(B)$ es una cota superior del conjunto $A$. Por lo tanto,

$$\sup(A) \leq \sup(A+B) - \sup(B).$$

Movemos el sumando $\sup(B)$ al otro lado: $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A+B)$. $\square$

**13 Ejercicio.** Enunciar y demostrar propiedades similares del ínfimo.