Sumas sobre conjuntos infinitos

En este tema S puede ser un conjunto finito o infinito, numerable o no numerable.

1 Definición. Dado un conjunto S, denotemos por $\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$ al conjunto de todos los subconjuntos finitos de S.

2 Definición. Sea S un conjunto, sea V un espacio normado, sea $(v_s)_{s\in S}$ una familia de elementos de V y sea $w \in V$. Se dice que la suma $\sum_{s\in S} v_s$ converge al vector w y se escribe

$$\sum_{s\in S} v_s = w,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $T_0 \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$, tal que para cada T en $\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$ con $T_0 \subseteq T$, se cumple la desigualdad

$$\left\| \sum_{s\in T} v_s - w \right\| < \varepsilon.$$

3 Observación. La definición anterior se puede escribir en términos de convergencia de redes. $\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$ es un conjunto dirigido.

4 Ejemplo. Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos

$$a_k := \frac{(-1)^k}{k}.$$

Entonces se puede demostrar que converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

pero no converge la suma infinita

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k.$$

5 Proposición (operaciones lineales con sumas)**.** *Enunciar la proposición sobre la suma de dos sumas y sobre el producto de una suma por un escalar.*

6 Proposición (transformación lineal acotada aplicada a una suma)**.** *Sean S un conjunto, V y W espacios normados, $(v_s)_{s\in S}$ una familia de elementos de V, $a \in V$ y $T \in \mathcal{B}(V,W)$. Supongamos que*

$$\sum_{s\in S} v_s = a.$$

Entonces

$$\sum_{s\in S} T(v_s) = T(a).$$

7 Proposición. *Sea S un conjunto y sea $(v_s)_{s\in S}$ una familia en $[0,+\infty)$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(a) existe w en $[0,+\infty)$ tal que

$$\sum_{s\in S} v_s = w,$$

(b) $\displaystyle \sup_{T\in\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(S)} \sum_{s\in T} v_s < +\infty.$

Si estas condiciones se cumplen, entonces el conjunto

$$\{s \in S\colon\ v_s \neq 0\}$$

es finito o numerable.

8 Ejemplo. Sea H un espacio de Hilbert y sea $(b_s)_{s\in S}$ una familia ortonormal de vectores en H. Se dice que $(b_s)_{s\in S}$ es una base ortonormal de H si para cada h en H

$$h = \sum_{s\in S} \langle h, b_s\rangle b_s.$$

Se sabe que en cada espacio de Hilbert H existe una base ortonormal. Idea de demostración: aplicar el lema de Zorn a la colección de todos los subconjuntos ortonormales del espacio H.

9 Proposición. *Sean X un conjunto, $H \le \mathbb{C}^X$ un espacio de Hilbert con núcleo reproductor K y $(b_s)_{s\in S}$ una base ortonormal en H, finita o numerable o infinita no numerable. Entonces para cada x, y en X,*

$$K(x,y) = \sum_{s\in S} b_s(x)\overline{b_s(y)}.$$

Se trata de la convergencia de una suma, donde los sumandos son elementos de $\mathbb{C}$.