Sumas de espacios normados

(un tema del curso “Análisis funcional”)

Egor Maximenko,

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

15 de marzo de 2022

Prerrequisitos

- Espacios normados.
- El producto cartesiano de conjuntos.
- La desigualdad de Minkowski para sucesiones.

El producto cartesiano de espacios vectoriales

Dada una familia $(V_j)_{j\in J}$ de espacios vectoriales complejos,
en el producto cartesiano $\prod_{j\in J} V_j$ se definen operaciones vectoriales por componentes:

$$\forall a, b \in \prod_{j\in J} V_j, \qquad a + b := \left[a_j + b_j\right]_{j\in J}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall a \in \prod_{j\in J} V_j, \qquad \lambda a := \left[\lambda a_j\right]_{j\in J}.$$

En otras palabras, $a + b, \lambda a \in \prod_{j\in J} V_j$, y

$$\forall j \in J \qquad (a+b)_j = a_j + b_j, \qquad (\lambda a)_j = \lambda a_j.$$

Hacia el concepto de la suma de espacios normados

Si $(V_j)_{j\in J}$ es una familia de espacios normados, entonces su suma se define como cierto subespacio del espacio vectorial $\prod_{j\in J} V_j$, dotado de cierta norma.

Hacia el concepto de la suma de espacios normados

Si $(V_j)_{j \in J}$ es una familia de espacios normados, entonces su suma se define como cierto subespacio del espacio vectorial $\prod_{j \in J} V_j$, dotado de cierta norma.

La definición requiere un parámetro adicional, $p \in [1, +\infty]$.

Hacia el concepto de la suma de espacios normados

Si $(V_j)_{j\in J}$ es una familia de espacios normados, entonces su suma se define como cierto subespacio del espacio vectorial $\prod_{j\in J} V_j$, dotado de cierta norma.

La definición requiere un parámetro adicional, $p \in [1, +\infty]$.

Para evitar sumas no numerables, en lo que sigue suponemos que J es finito o $J = \mathbb{N}$.

Hacia el concepto de la suma de espacios normados

Si $(V_j)_{j \in J}$ es una familia de espacios normados, entonces su suma se define como cierto subespacio del espacio vectorial $\prod_{j \in J} V_j$, dotado de cierta norma.

La definición requiere un parámetro adicional, $p \in [1, +\infty]$.

Para evitar sumas no numerables, en lo que sigue suponemos que J es finito o $J = \mathbb{N}$.

La definición será similar a la definición de los espacios ℓ^p,
pero el j-ésimo componente de la sucesión pertenecerá a V_j.

Definición

En lo que sigue suponemos que J es un conjunto finito o $J = \mathbb{N}$.

Sea $(V_j)_{j\in J}$ una familia de espacios normados. Para $p \in [1, +\infty)$,

$$\bigoplus_{j\in J}^{p} V_j := \left\{ u \in \prod_{j\in J} V_j : \quad \left(\sum_{j\in J} \|u_j\|_j^p \right)^{1/p} < +\infty \right\},$$

Definición

En lo que sigue suponemos que J es un conjunto finito o $J = \mathbb{N}$.

Sea $(V_j)_{j\in J}$ una familia de espacios normados. Para $p \in [1, +\infty)$,

$$\bigoplus_{j\in J}^{p} V_j := \left\{ u \in \prod_{j\in J} V_j : \quad \left(\sum_{j\in J} \|u_j\|_j^p \right)^{1/p} < +\infty \right\},$$

con operaciones componente a componente: $(u + w)_j := u_j + w_j$, $(\lambda u)_j := \lambda u_j$,

Definición

En lo que sigue suponemos que J es un conjunto finito o $J = \mathbb{N}$.

Sea $(V_j)_{j\in J}$ una familia de espacios normados. Para $p \in [1, +\infty)$,

$$\bigoplus_{j\in J}^{p} V_j := \left\{ u \in \prod_{j\in J} V_j : \quad \left(\sum_{j\in J} \|u_j\|_j^p \right)^{1/p} < +\infty \right\},$$

con operaciones componente a componente: $(u+w)_j := u_j + w_j$, $(\lambda u)_j := \lambda u_j$, y con la norma

$$N(u) := \left(\sum_{j\in J} \|u_j\|_j^p \right)^{1/p}.$$

Definición

En lo que sigue suponemos que J es un conjunto finito o $J = \mathbb{N}$.

Sea $(V_j)_{j\in J}$ una familia de espacios normados. Para $p \in [1, +\infty)$,

$$\bigoplus_{j\in J}^{p} V_j := \left\{ u \in \prod_{j\in J} V_j : \quad \left(\sum_{j\in J} \|u_j\|_j^p \right)^{1/p} < +\infty \right\},$$

con operaciones componente a componente: $(u+w)_j := u_j + w_j$, $(\lambda u)_j := \lambda u_j$, y con la norma

$$N(u) := \left(\sum_{j\in J} \|u_j\|_j^p \right)^{1/p}.$$

Ejercicio. Mostrar que ${\bigoplus^{p}}_{j\in J} V_j$ efectivamente es un espacio normado.

Definición

Si $p = +\infty$,

$$\bigoplus_{j\in J}^{+\infty} V_j := \left\{ u \in \prod_{j\in J} V_j : \quad \sup_{j\in J} \|u_j\|_j < +\infty \right\},$$

Definición

Si $p = +\infty$,

$$\bigoplus_{j\in J}^{+\infty} V_j := \left\{ u \in \prod_{j\in J} V_j : \quad \sup_{j\in J} \|u_j\|_j < +\infty \right\},$$

con operaciones componente a componente: $(u+w)_j := u_j + w_j$, $(\lambda u)_j := \lambda u_j$,

Definición

Si $p = +\infty$,

$$\bigoplus_{j\in J}^{+\infty} V_j := \left\{ u \in \prod_{j\in J} V_j : \quad \sup_{j\in J} \|u_j\|_j < +\infty \right\},$$

con operaciones componente a componente: $(u+w)_j := u_j + w_j$, $(\lambda u)_j := \lambda u_j$, y con la norma

$$N(u) := \sup_{j\in J} \|u_j\|_j.$$

Definición

Si $p = +\infty$,

$$\bigoplus_{j\in J}^{+\infty} V_j := \left\{ u \in \prod_{j\in J} V_j : \quad \sup_{j\in J} \|u_j\|_j < +\infty \right\},$$

con operaciones componente a componente: $(u+w)_j := u_j + w_j$, $(\lambda u)_j := \lambda u_j$, y con la norma

$$N(u) := \sup_{j\in J} \|u_j\|_j.$$

Ejercicio. Mostrar que $\bigoplus_{j\in J}^{+\infty} V_j$ efectivamente es un espacio normado.

El caso particular $J = \{1, 2\}$

Si V_1 y V_2 son dos espacios normados, entonces $V_1 \oplus^p V_2$ es el conjunto

$$V_1 \times V_2$$

con las operaciones componente a componente y con la norma

$$N\big((u_1, u_2)\big) = \left(\|u_1\|_1^p + \|u_2\|_2^p\right)^{1/p}.$$

Para $p = +\infty$,

$$N\big((u_1, u_2)\big) = \max\{\|u_1\|_1, \|u_2\|_2\}.$$

La suma de varias copias del espacio $\mathbb{C}$

Consideremos el caso particular, cuando $V_j = \mathbb{C}$ para cada j.

La suma de varias copias del espacio $\mathbb{C}$

Consideremos el caso particular, cuando $V_j = \mathbb{C}$ para cada j.

Caso $J = \{1, \ldots, n\}$:

$$\bigoplus_{1 \le j \le n}^{p} \mathbb{C} =$$

La suma de varias copias del espacio $\mathbb{C}$

Consideremos el caso particular, cuando $V_j = \mathbb{C}$ para cada j.

Caso $J = \{1, \ldots, n\}$:

$$\bigoplus_{1 \le j \le n}^{p} \mathbb{C} = (\mathbb{C}^n, \| \cdot \|_p).$$

La suma de varias copias del espacio $\mathbb{C}$

Consideremos el caso particular, cuando $V_j = \mathbb{C}$ para cada j.

Caso $J = \{1, \ldots, n\}$:

$$\bigoplus_{1 \le j \le n}^{p} \mathbb{C} = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p).$$

Caso $J = \mathbb{N}$:

$$\bigoplus_{j \in \mathbb{N}}^{p} \mathbb{C} =$$

La suma de varias copias del espacio $\mathbb{C}$

Consideremos el caso particular, cuando $V_j = \mathbb{C}$ para cada j.

Caso $J = \{1, \ldots, n\}$:

$$\bigoplus_{1 \le j \le n}^{p} \mathbb{C} = (\mathbb{C}^n, \| \cdot \|_p).$$

Caso $J = \mathbb{N}$:

$$\bigoplus_{j \in \mathbb{N}}^{p} \mathbb{C} = \ell^p.$$

Proyecciones naturales

Sea $(V_j)_{j\in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.
Denotamos por W el espacio $\bigoplus\limits_{j\in J}^{p} V_j$ y por N la norma en W.

Proyecciones naturales

Sea $(V_j)_{j\in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.
Denotamos por W el espacio $\bigoplus_{j\in J}^{p} V_j$ y por N la norma en W.

Para cada s en J, definimos $P_s \colon W \to V_s$,

$$P_s(u) := u_s.$$

Proyecciones naturales

Sea $(V_j)_{j\in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.
Denotamos por W el espacio $\bigoplus\limits_{j\in J}^{p} V_j$ y por N la norma en W.

Para cada s en J, definimos $P_s \colon W \to V_s$,

$$P_s(u) := u_s.$$

Ejercicio.

Demostrar que P_s es un operador lineal, y $\|P_s(u)\|_s \le N(u)$ para cada u en W.

Proyecciones naturales

Sea $(V_j)_{j\in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1,+\infty]$.
Denotamos por W el espacio $\displaystyle\bigoplus_{j\in J}^{p} V_j$ y por N la norma en W.

Para cada s en J, definimos $P_s\colon W \to V_s$,

$$P_s(u) \coloneqq u_s.$$

Ejercicio.

Demostrar que P_s es un operador lineal, y $\|P_s(u)\|_s \le N(u)$ para cada u en W.

Ejercicio más interesante.

Demostrar que P_s es una función abierta (las imágenes de los abiertos son abiertos).

Encajes naturales

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.
Denotamos por W el espacio $\bigoplus_{j \in J}^{p} V_j$ y por N la norma en W.

Encajes naturales

Sea $(V_j)_{j\in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.
Denotamos por W el espacio $\bigoplus_{j\in J}^{p} V_j$ y por N la norma en W.

Para cada s en J, definimos $E_s\colon V_s \to W$,

$$E_s(u)_j := \begin{cases} u, & j = s; \\ 0_{V_j}, & j \neq s. \end{cases}$$

Encajes naturales

Sea $(V_j)_{j\in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.
Denotamos por W el espacio $\bigoplus\limits_{j\in J}^{p} V_j$ y por N la norma en W.

Para cada s en J, definimos $E_s\colon V_s \to W$,

$$E_s(u)_j := \begin{cases} u, & j = s; \\ 0_{V_j}, & j \neq s. \end{cases}$$

Ejercicio. Demostrar que E_s es una isometría lineal.

Encajes naturales

Sea $(V_j)_{j\in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1,+\infty]$.
Denotamos por W el espacio $\bigoplus\limits_{j\in J}^{p} V_j$ y por N la norma en W.

Para cada s en J, definimos $E_s\colon V_s \to W$,

$$E_s(u)_j := \begin{cases} u, & j = s; \\ 0_{V_j}, & j \neq s. \end{cases}$$

Ejercicio. Demostrar que E_s es una isometría lineal.

Ejercicio. Demostrar que la función E_s es cerrada.

Encajes naturales

Sea $(V_j)_{j\in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.
Denotamos por W el espacio $\bigoplus_{j\in J}^{p} V_j$ y por N la norma en W.

Para cada s en J, definimos $E_s \colon V_s \to W$,

$$E_s(u)_j := \begin{cases} u, & j = s; \\ 0_{V_j}, & j \neq s. \end{cases}$$

Ejercicio. Demostrar que E_s es una isometría lineal.

Ejercicio. Demostrar que la función E_s es cerrada.

Ejercicio. Demostrar que $P_s E_s = I_{V_s}$. Por consecuencia, el operador P_s es

Encajes naturales

Sea $(V_j)_{j\in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.
Denotamos por W el espacio $\bigoplus_{j\in J}^{p} V_j$ y por N la norma en W.

Para cada s en J, definimos $E_s \colon V_s \to W$,

$$E_s(u)_j := \begin{cases} u, & j = s; \\ 0_{V_j}, & j \neq s. \end{cases}$$

Ejercicio. Demostrar que E_s es una isometría lineal.

Ejercicio. Demostrar que la función E_s es cerrada.

Ejercicio. Demostrar que $P_s E_s = I_{V_s}$. Por consecuencia, el operador P_s es suprayectivo.

Sumas de espacios normados y completez

Ejercicio.

Sea $(V_j)_{j\in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.

Demostrar que

$$\bigoplus_{j\in J}^{p} V_j \text{ es de Banach} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{para cada } k \text{ en } J\text{, el espacio } V_k \text{ es Banach.}$$

Sumas de espacios normados y completez

Ejercicio simple.

Sean V_1 y V_2 espacios normados, $p \in [1, +\infty]$.

Demostrar que

$$V_1 \oplus^p V_2 \text{ es de Banach} \quad \Longleftrightarrow \quad V_1 \text{ y } V_2 \text{ ambos son de Banach.}$$