

Sumas de espacios normados

(un tema del curso “Análisis funcional”)

Egor Maximenko,

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

19 de octubre de 2020

Prerrequisitos

- Espacios normados.
- El producto cartesiano de conjuntos.
- La desigualdad de Minkowski para sucesiones.

El producto cartesiano de espacios vectoriales

Dada una familia $(V_j)_{j \in J}$ de espacios vectoriales complejos, en el producto cartesiano $\prod_{j \in J} V_j$ se definen operaciones vectoriales por componentes:

$$\forall a, b \in \prod_{j \in J} V_j, \quad a + b := [a_j + b_j]_{j \in J}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall a \in \prod_{j \in J} V_j, \quad \lambda a := [\lambda a_j]_{j \in J}.$$

En otras palabras, $a + b, \lambda a \in \prod_{j \in J} V_j$, y

$$\forall j \in J \quad (a + b)_j = a_j + b_j, \quad (\lambda a)_j = \lambda a_j.$$

Hacia el concepto de la suma de espacios normados

Si $(V_j)_{j \in J}$ es una familia de espacios normados, entonces su **suma** se define como cierto subespacio del espacio vectorial $\prod_{j \in J} V_j$, dotado de cierta norma.

Hacia el concepto de la suma de espacios normados

Si $(V_j)_{j \in J}$ es una familia de espacios normados, entonces su **suma** se define como cierto subespacio del espacio vectorial $\prod_{j \in J} V_j$, dotado de cierta norma.

La definición requiere un parámetro adicional, $p \in [1, +\infty]$.

Hacia el concepto de la suma de espacios normados

Si $(V_j)_{j \in J}$ es una familia de espacios normados, entonces su **suma** se define como cierto subespacio del espacio vectorial $\prod_{j \in J} V_j$, dotado de cierta norma.

La definición requiere un parámetro adicional, $p \in [1, +\infty]$.

Para evitar sumas no numerables, en lo que sigue suponemos que J es finito o $J = \mathbb{N}$.

Hacia el concepto de la suma de espacios normados

Si $(V_j)_{j \in J}$ es una familia de espacios normados, entonces su **suma** se define como cierto subespacio del espacio vectorial $\prod_{j \in J} V_j$, dotado de cierta norma.

La definición requiere un parámetro adicional, $p \in [1, +\infty]$.

Para evitar sumas no numerables, en lo que sigue suponemos que J es finito o $J = \mathbb{N}$.

La definición será similar a la definición de los espacios ℓ^p , pero el j -ésimo componente de la sucesión pertenecerá a V_j .

Definición

En lo que sigue suponemos que J es un conjunto finito o $J = \mathbb{N}$.

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados. Para $p \in [1, +\infty)$,

$$\bigoplus_{j \in J}^p V_j := \left\{ u \in \prod_{j \in J} V_j : \left(\sum_{j \in J} \|u_j\|_j^p \right)^{1/p} < +\infty \right\},$$

Definición

En lo que sigue suponemos que J es un conjunto finito o $J = \mathbb{N}$.

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados. Para $p \in [1, +\infty)$,

$$\bigoplus_{j \in J}^p V_j := \left\{ u \in \prod_{j \in J} V_j : \left(\sum_{j \in J} \|u_j\|_j^p \right)^{1/p} < +\infty \right\},$$

con operaciones componente a componente: $(u + w)_j := u_j + w_j$, $(\lambda u)_j := \lambda u_j$,

Definición

En lo que sigue suponemos que J es un conjunto finito o $J = \mathbb{N}$.

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados. Para $p \in [1, +\infty)$,

$$\bigoplus_{j \in J}^p V_j := \left\{ u \in \prod_{j \in J} V_j : \left(\sum_{j \in J} \|u_j\|_j^p \right)^{1/p} < +\infty \right\},$$

con operaciones componente a componente: $(u + w)_j := u_j + w_j$, $(\lambda u)_j := \lambda u_j$, y con la norma

$$N(u) := \left(\sum_{j \in J} \|u_j\|_j^p \right)^{1/p}.$$

Definición

En lo que sigue suponemos que J es un conjunto finito o $J = \mathbb{N}$.

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados. Para $p \in [1, +\infty)$,

$$\bigoplus_{j \in J}^p V_j := \left\{ u \in \prod_{j \in J} V_j : \left(\sum_{j \in J} \|u_j\|_j^p \right)^{1/p} < +\infty \right\},$$

con operaciones componente a componente: $(u + w)_j := u_j + w_j$, $(\lambda u)_j := \lambda u_j$, y con la norma

$$N(u) := \left(\sum_{j \in J} \|u_j\|_j^p \right)^{1/p}.$$

Ejercicio. Mostrar que $\bigoplus_{j \in J}^p V_j$ efectivamente es un espacio normado.

Definición

Si $p = +\infty$,

$$\bigoplus_{j \in J}^{+\infty} V_j := \left\{ u \in \prod_{j \in J} V_j : \sup_{j \in J} \|u_j\|_j < +\infty \right\},$$

Definición

Si $p = +\infty$,

$$\bigoplus_{j \in J}^{+\infty} V_j := \left\{ u \in \prod_{j \in J} V_j : \sup_{j \in J} \|u_j\|_j < +\infty \right\},$$

con operaciones componente a componente: $(u + w)_j := u_j + w_j$, $(\lambda u)_j := \lambda u_j$,

Definición

Si $p = +\infty$,

$$\bigoplus_{j \in J}^{+\infty} V_j := \left\{ u \in \prod_{j \in J} V_j : \sup_{j \in J} \|u_j\|_j < +\infty \right\},$$

con operaciones componente a componente: $(u + w)_j := u_j + w_j$, $(\lambda u)_j := \lambda u_j$, y con la norma

$$N(u) := \sup_{j \in J} \|u_j\|_j.$$

Definición

Si $p = +\infty$,

$$\bigoplus_{j \in J}^{+\infty} V_j := \left\{ u \in \prod_{j \in J} V_j : \sup_{j \in J} \|u_j\|_j < +\infty \right\},$$

con operaciones componente a componente: $(u + w)_j := u_j + w_j$, $(\lambda u)_j := \lambda u_j$, y con la norma

$$N(u) := \sup_{j \in J} \|u_j\|_j.$$

Ejercicio. Mostrar que $\bigoplus_{j \in J}^{+\infty} V_j$ efectivamente es un espacio normado.

El caso particular $J = \{1, 2\}$

Si V_1 y V_2 son dos espacios normados, entonces $V_1 \oplus^p V_2$ es el conjunto

$$V_1 \times V_2$$

con las operaciones componente a componente y con la norma

$$N((u_1, u_2)) = (\|u_1\|_1^p + \|u_2\|_2^p)^{1/p}.$$

Para $p = +\infty$,

$$N((u_1, u_2)) = \max\{\|u_1\|_1, \|u_2\|_2\}.$$

La suma de varias copias del espacio \mathbb{C}

Consideremos el caso particular, cuando $V_j = \mathbb{C}$ para cada j .

La suma de varias copias del espacio \mathbb{C}

Consideremos el caso particular, cuando $V_j = \mathbb{C}$ para cada j .

Caso $J = \{1, \dots, n\}$:

$$\bigoplus_{1 \leq j \leq n}^p \mathbb{C} =$$

La suma de varias copias del espacio \mathbb{C}

Consideremos el caso particular, cuando $V_j = \mathbb{C}$ para cada j .

Caso $J = \{1, \dots, n\}$:

$$\bigoplus_{1 \leq j \leq n}^p \mathbb{C} = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p).$$

La suma de varias copias del espacio \mathbb{C}

Consideremos el caso particular, cuando $V_j = \mathbb{C}$ para cada j .

Caso $J = \{1, \dots, n\}$:

$$\bigoplus_{1 \leq j \leq n}^p \mathbb{C} = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p).$$

Caso $J = \mathbb{N}$:

$$\bigoplus_{j \in \mathbb{N}}^p \mathbb{C} =$$

La suma de varias copias del espacio \mathbb{C}

Consideremos el caso particular, cuando $V_j = \mathbb{C}$ para cada j .

Caso $J = \{1, \dots, n\}$:

$$\bigoplus_{1 \leq j \leq n}^p \mathbb{C} = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p).$$

Caso $J = \mathbb{N}$:

$$\bigoplus_{j \in \mathbb{N}}^p \mathbb{C} = \ell^p.$$

Proyecciones naturales

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.

Denotamos por W el espacio $\bigoplus_{j \in J}^p V_j$ y por N la norma en W .

Proyecciones naturales

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.

Denotamos por W el espacio $\bigoplus_{j \in J}^p V_j$ y por N la norma en W .

Para cada s en J , definimos $P_s: W \rightarrow V_s$,

$$P_s(u) := u_s.$$

Proyecciones naturales

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.

Denotamos por W el espacio $\bigoplus_{j \in J}^p V_j$ y por N la norma en W .

Para cada s en J , definimos $P_s: W \rightarrow V_s$,

$$P_s(u) := u_s.$$

Ejercicio.

Demostrar que P_s es un operador lineal, y $\|P_s(u)\|_s \leq N(u)$ para cada u en W .

Proyecciones naturales

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.

Denotamos por W el espacio $\bigoplus_{j \in J}^p V_j$ y por N la norma en W .

Para cada s en J , definimos $P_s: W \rightarrow V_s$,

$$P_s(u) := u_s.$$

Ejercicio.

Demostrar que P_s es un operador lineal, y $\|P_s(u)\|_s \leq N(u)$ para cada u en W .

Ejercicio más interesante.

Demostrar que P_s es una función abierta (las imágenes de los abiertos son abiertos).

Encajes naturales

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.

Denotamos por W el espacio $\bigoplus_{j \in J}^p V_j$ y por N la norma en W .

Encajes naturales

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.

Denotamos por W el espacio $\bigoplus_{j \in J}^p V_j$ y por N la norma en W .

Para cada s en J , definimos $E_s: V_s \rightarrow W$,

$$E_s(u)_j := \begin{cases} u, & j = s; \\ 0_{V_j}, & j \neq s. \end{cases}$$

Encajes naturales

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.

Denotamos por W el espacio $\bigoplus_{j \in J}^p V_j$ y por N la norma en W .

Para cada s en J , definimos $E_s: V_s \rightarrow W$,

$$E_s(u)_j := \begin{cases} u, & j = s; \\ 0_{V_j}, & j \neq s. \end{cases}$$

Ejercicio. Demostrar que E_s es una isometría lineal.

Encajes naturales

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.

Denotamos por W el espacio $\bigoplus_{j \in J}^p V_j$ y por N la norma en W .

Para cada s en J , definimos $E_s: V_s \rightarrow W$,

$$E_s(u)_j := \begin{cases} u, & j = s; \\ 0_{V_j}, & j \neq s. \end{cases}$$

Ejercicio. Demostrar que E_s es una isometría lineal.

Ejercicio. Demostrar que la función E_s es cerrada.

Encajes naturales

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.

Denotamos por W el espacio $\bigoplus_{j \in J}^p V_j$ y por N la norma en W .

Para cada s en J , definimos $E_s: V_s \rightarrow W$,

$$E_s(u)_j := \begin{cases} u, & j = s; \\ 0_{V_j}, & j \neq s. \end{cases}$$

Ejercicio. Demostrar que E_s es una isometría lineal.

Ejercicio. Demostrar que la función E_s es cerrada.

Ejercicio. Demostrar que $P_s E_s = I_{V_s}$. Por consecuencia, el operador P_s es

Encajes naturales

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.

Denotamos por W el espacio $\bigoplus_{j \in J}^p V_j$ y por N la norma en W .

Para cada s en J , definimos $E_s: V_s \rightarrow W$,

$$E_s(u)_j := \begin{cases} u, & j = s; \\ 0_{V_j}, & j \neq s. \end{cases}$$

Ejercicio. Demostrar que E_s es una isometría lineal.

Ejercicio. Demostrar que la función E_s es cerrada.

Ejercicio. Demostrar que $P_s E_s = I_{V_s}$. Por consecuencia, el operador P_s es suprayectivo.

Sumas de espacios normados y completéz

Ejercicio.

Sea $(V_j)_{j \in J}$ una familia de espacios normados, y sea $p \in [1, +\infty]$.

Demostrar que

$$\bigoplus_{j \in J}^p V_j \text{ es de Banach} \iff \text{para cada } k \text{ en } J, \text{ el espacio } V_k \text{ es Banach.}$$

Sumas de espacios normados y completitud

Ejercicio simple.

Sean V_1 y V_2 espacios normados, $p \in [1, +\infty]$.

Demostrar que

$$V_1 \oplus^p V_2 \text{ es de Banach} \iff V_1 \text{ y } V_2 \text{ ambos son de Banach.}$$