Sumas de familias

1 Definición. Sean $(J, \succeq)$ un conjunto dirigido, X un espacio topológico, $(x_j)_{j\in J}$ una red en X, y un punto de X. Se dice que $(x_j)_{j\in J}$ converge a y si para cada vecindad V del punto y existe un elemnto j de J tal que para cualesquiera $k \succeq j$ se tiene que $x_k \in V$.

Vamos a considerar familias con valores en algún espacio de Hilbert H.

2 Definición. Sea $(g_a)_{a\in\mathcal{A}}$ una familia en H. Denotemos por $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{A})$ al conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathcal{A}$, dirigido por la relación $\supseteq$. A cada elemento A en $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{A})$ le asociamos la suma finita $S_A \coloneqq \sum_{a\in A} g_a$. Entonces la suma de la familia $(g_a)_{a\in\mathcal{A}}$, denotada por $\sum(g_a)_{a\in\mathcal{A}}$, se define como el límite de la red $(S_A)_{A\in\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{A})}$. Por supuesto, este límite no siempre existe.

En otras palabras, la suma $\sum(g_a)_{a\in\mathcal{A}}$ converge a h si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto B en $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{A})$ tal que para cada conjunto finito A con $B \subseteq A \subseteq \mathcal{A}$ se cumple la desigualdad

$$\left|\sum_{a\in A} g_a - h\right| < \varepsilon.$$

3 Ejemplo. Sea $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ y $g_a = \frac{(-1)^a}{a}$. Entonces la serie $\sum_{a\in\mathbb{N}} g_a$ converge, esto es, converge la sucesión de las sumas parciales:

$$\lim_{b\to+\infty} \sum_{a\le b} g_a = h,$$

pero la suma $\sum(g_a)_{a\in\mathbb{N}}$ no existe en el sentido de la Definición 2.

Decimos que un conjunto es *numerable* si es finito o equipotente a $\mathbb{N}$.

4 Proposición. *Sea $(g_a)_{a\in\mathcal{A}}$ una familia en $[0, +\infty)$ tal que*

$$\sup_{A\in J} \sum_{a\in A} g_a = h < +\infty.$$

Entonces

$$\sum (g_a)_{a\in\mathcal{A}} = h$$

y el conjunto $\{a \in \mathcal{A}\colon\ g_a > 0\}$ es numerable.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Encontramos B en $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{A})$ tal que $\sum_{a\in B} g_a > h - \varepsilon$. Entonces para cada A en $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathcal{A})$ con $A \supseteq B$ obtenemos

$$h - \varepsilon < \sum_{a\in B} g_a \le \sum_{a\in A} g_a \le h.$$

Hemos demostrado que $\sum(g_a)_{a\in\mathcal{A}} = h$. Notamos que

$$\{a \in \mathcal{A}\colon\ g_a > 0\} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{a \in \mathcal{A}\colon\ g_a \ge 1/p\},$$

y para cada p en $\mathbb{N}$ el conjunto $\{a \in \mathcal{A}\colon\ g_a \ge 1/p\}$ tiene no más de hp elementos. Por eso el conjunto $\{a \in \mathcal{A}\colon\ g_a > 0\}$ es numerable. □

5 Proposición. *Si $J = \mathbb{N}$ y $\sum(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a h, entonces $\sum_{j\in\mathbb{N}} g_j$ converge a h.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos B en $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ tal que para cada A en $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ con $A \supseteq B$ se cumple $|S_A - h| < \varepsilon$. Sea $m = \max(B)$. Entonces $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$. Para cada $n \ge m$ obtenemos $\{1, \ldots, n\} \supseteq B$ y por eso $|S_{\{1,\ldots,n\}}) - h| < \varepsilon$. □