La propiedad subaditiva de medidas
(un tema de análisis real)

Egor Maximenko
https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

20 de marzo de 2024

Objetivos. Demostrar la propiedad subaditiva de medidas.

Prerrequisitos:

- definición de medidas y sus propiedades elementales;
- la medida de la unión de una sucesión creciente;
- series de números.

Repaso

Proposición (sobre la medida de la unión e intersección de dos conjuntos)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sean* $A, B \in \mathcal{F}$. *Entonces*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Repaso

Proposición (sobre la medida de la unión e intersección de dos conjuntos)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sean* $A, B \in \mathcal{F}$. *Entonces*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Teorema (sobre la medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión creciente en* $\mathcal{F}$. *Entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).$$

Receta para pasar de una sucesión arbitraria de conjuntos a una sucesión creciente

Proposición (sobre las uniones parciales de una sucesión arbitraria de conjuntos)

Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de conjuntos. Para cada* k *en* $\mathbb{N}$, *pongamos*

$$V_k := \bigcup_{j=1}^{k} A_j.$$

Entonces la sucesión $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *es creciente y*

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j.$$

Demostración de la proposición sobre las uniones parciales, inicio

$$V_k := \bigcup_{j=1}^{k} A_j.$$

I. Mostremos que $(V_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow$. Para cada k en $\mathbb{N}$,

$$V_{k+1} = \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \cup A_{k+1} = V_k + A_{k+1} \supseteq V_k.$$

Demostración de la proposición sobre las uniones parciales, final

II. Para cada k en $\mathbb{N}$, tenemos $\quad V_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j, \quad$ luego

Demostración de la proposición sobre las uniones parciales, final

II. Para cada k en $\mathbb{N}$, tenemos $\quad V_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j, \quad$ luego

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j.$$

Demostración de la proposición sobre las uniones parciales, final

II. Para cada k en $\mathbb{N}$, tenemos $\quad V_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j, \quad$ luego

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j.$$

Por otro lado, para cada j en $\mathbb{N}$ tenemos $\quad A_j \subseteq V_j \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k, \quad$ luego

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k.$$

La propiedad subaditiva de medidas

Vamos a demostrar que

la medida de la unión es menor o igual que la suma de las medidas.

La propiedad subaditiva de medidas

Vamos a demostrar que

la medida de la unión es menor o igual que la suma de las medidas.

- Primero, veremos el caso de dos conjuntos.
- Luego, el caso de uniones finitas.
- Finalmente, el caso de uniones numerables.

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de dos conjuntos

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sean* $A, B \in \mathcal{F}$. *Entonces*

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de dos conjuntos

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sean* $A, B \in \mathcal{F}$*. Entonces*

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

Demostración.

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de uniones finitas

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida. Entonces*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \underbrace{\forall (A_k)_{k=1}^n \in \mathcal{F}^n \qquad \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \le \sum_{k=1}^n \mu(A_k)}_{P(k)}.$$

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de uniones finitas

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida. Entonces*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \underbrace{\forall (A_k)_{k=1}^n \in \mathcal{F}^n \qquad \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \le \sum_{k=1}^n \mu(A_k)}_{P(k)}.$$

Demostración: inducción sobre k.

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de uniones finitas

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida. Entonces*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \underbrace{\forall (A_k)_{k=1}^{n} \in \mathcal{F}^n \qquad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)}_{P(k)}.$$

Demostración: inducción sobre k.

La afirmación $P(1)$ es trivial, porque $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{1} A_k = A_1$.

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de uniones finitas

Suponiendo $P(n)$ demostremos $P(n+1)$.

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de uniones finitas

Suponiendo $P(n)$ demostremos $P(n+1)$.

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \overset{(1)}{=\!=} \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \overset{(2)}{\leq} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mu(A_{n+1})$$

$$\overset{(3)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) + \mu(A_{n+1}) \overset{(4)}{=\!=} \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k).$$

Justificación de los pasos:

(1) la definición inductiva de $\bigcup_{k=1}^{n}$;

(2) propiedad subaditiva de μ, en el caso de dos conjuntos;

(3) hipótesis de inducción $P(n)$ aplicada a la lista de conjuntos $(A_k)_{k=1}^{n}$;

(4) la definición inductiva de $\sum_{k=1}^{n}$.

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de una unión numerable

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. *Entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Demostración del teorema

Para cada k en $\mathbb{N}$, $\qquad V_k := \bigcup_{j=1}^{k} A_j.$ $\quad$ Entonces $\quad \mu(V_k) \overset{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j).$

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \xlongequal{(1)} \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k\right) \xlongequal{(2)} \lim_{k\to\infty} \mu(V_k) \overset{(3)}{\leq} \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) \xlongequal{(4)} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Justificación:

(1) la propiedad finitamente subaditiva de μ;

(2) $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k$;

(3) teorema sobre la medida de la unión de una sucesión creciente;

(4) el paso al límite en (1); los límites existen porque las sucesiones son crecientes;

(5) definición de $\sum_{j=1}^{\infty}$.

Vamos a ver que el teorema no se generaliza a familias no numerables.

¿Cómo definir sumas no numerables de números no negativos?

Si $(x_j)_{j\in J}$ es una familia arbitraria (posiblemente no numerable) en $[0,+\infty]$, hay varios caminos equivalentes para definir $\sum_{j\in J} x_j$.

En todos estos tres caminos se utiliza la colección

$$\mathcal{K} := \{K \subseteq J: \quad K \text{ es finito}\}.$$

A. $\sup\{\sum_{j\in K} x_j : \quad K \in \mathcal{K}\}$.

B. El límite de la red $\left(\sum_{j\in K} x_j\right)_{K\in\mathcal{K}}$, donde $\mathcal{K}$ es dirigido con $\subseteq$.

C. De manera similar a B, pero usar el concepto del límite de un filtro.

Contraejemplo con una unión no numerable

Ejercicio. Consideremos el espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$, donde X es un conjunto infinito no numerable,

$$\mathcal{N} := \Big\{ Y \subseteq X : \ Y \text{ es finito o numerable} \Big\}, \quad \mathcal{F} := \{ Y \subseteq X : \quad Y \in \mathcal{N} \quad \vee \quad X \setminus Y \in \mathcal{N} \},$$

$$\mu(Y) := \begin{cases} 0, & Y \in \mathcal{N}; \\ +\infty, & X \setminus Y \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Construir una familia no numerable $(A_j)_{j \in J}$ en $\mathcal{F}$ tal que

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) = +\infty, \qquad \text{pero} \qquad \forall j \in J \quad \mu(A_j) = 0.$$

Receta para pasar de una suc. arbitraria de conjuntos a una suc. disjunta

Ejercicio. Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de conjuntos. Definimos

$$V_0 := \emptyset, \qquad V_k := \bigcup_{j=1}^{k} A_j \qquad D_k := V_k \setminus V_{k-1} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Demostrar que

- para cada k en $\mathbb{N}$, $\quad \boxed{D_k = A_k \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\Big),}$
- para cada k en $\mathbb{N}$, $\quad D_k \subseteq A_k$,
- la sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta,
- $\displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k.$

Otra demostración de la propiedad subaditiva

Ejercicio. Demostrar la propiedad subaditiva de las medidas
(en el caso de uniones numerables) usando el resultado del ejercicio anterior.

Resumen: la medida de la unión, varios casos

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}$.

Queremos relacionar la medida del conjunto $B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ con las medidas de A_k.

Resumen: la medida de la unión, varios casos

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}$.

Queremos relacionar la medida del conjunto $B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ con las medidas de A_k.

título	suposición adicional	fórmula
propiedad σ-aditiva	$(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta	$\mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$
medida de la unión de una suc. creciente	$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow$	$\mu(B) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$
propiedad subaditiva		$\mu(B) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$

Completez del espacio L^p

Teorema de la convergencia dominada

Lema de Fatou

Teorema de la convergencia monótona

Propiedad σ-subaditiva de medida

Medida de la unión de una suc. creciente

Propiedad σ-aditiva de medida