Estructura de sucesiones crecientes de conjuntos (un tema de “Análisis Real”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

14 de febrero de 2024

Objetivo:

dada una sucesión creciente de conjuntos,
pasar a una sucesión disjunta que tenga la misma unión.

Prerrequisitos:

operaciones con conjuntos,
operaciones con familias de conjuntos,
el principio de inducción matemática.

Aplicación:

continuidad de la medida por abajo.

Sucesiones crecientes, sucesiones disjuntas

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos.

Decimos que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente si

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad A_k \subseteq A_{k+1}.$$

Decimos que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta si

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \qquad \left(j \neq k \quad \Longrightarrow \quad A_j \cap A_k = \emptyset\right).$$

Sucesiones crecientes

Ejercicio.

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos. Demostrar que

$$\forall j,k\in\mathbb{N}\qquad \big(j<k\quad\Longrightarrow\quad A_j\subseteq A_k\big).$$

Sucesiones crecientes

Ejercicio.

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos. Demostrar que

$$\forall j,k\in\mathbb{N}\qquad \big(j<k \quad\Longrightarrow\quad A_j\subseteq A_k\big).$$

Otra forma equivalente:

$$\forall j,n\in\mathbb{N}\qquad A_j\subseteq A_{j+n}.$$

Proposición (sobre la estructura de una sucesión creciente de conjuntos)

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos, esto es, $A_k \subseteq A_{k+1}$ para cada k en $\mathbb{N}$. Pongamos $A_0 := \emptyset$,

$$D_k := A_k \setminus A_{k-1} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Entonces:

1) la sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta;

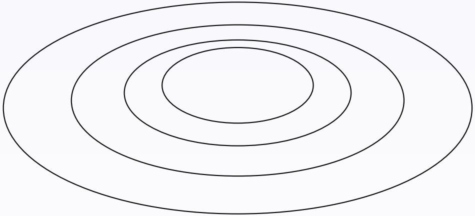
2) para cada m en $\mathbb{N}$,

$$A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k,$$

3) $\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k.$

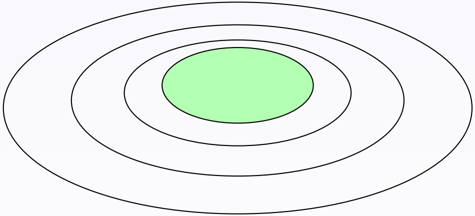
Dibujo: los conjuntos A_k y D_k

$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k := A_k \setminus A_{k-1}.$$



Dibujo: los conjuntos A_k y D_k

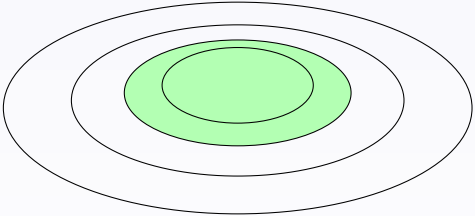
$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k := A_k \setminus A_{k-1}.$$



A_1

Dibujo: los conjuntos A_k y D_k

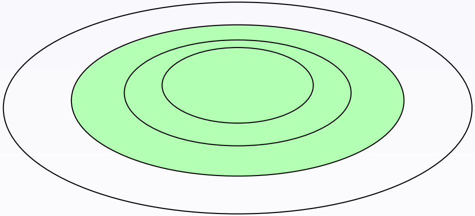
$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k := A_k \setminus A_{k-1}.$$



A_2

Dibujo: los conjuntos A_k y D_k

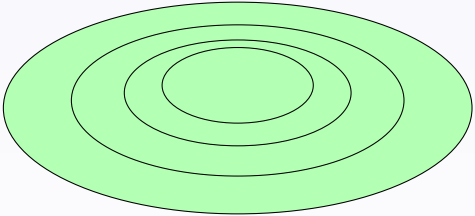
$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k := A_k \setminus A_{k-1}.$$



A_3

Dibujo: los conjuntos A_k y D_k

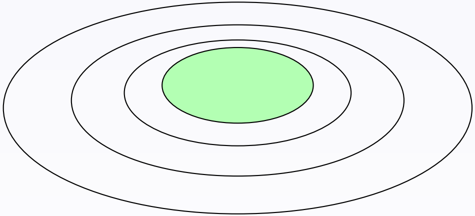
$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k-1}.$$



A_4

Dibujo: los conjuntos A_k y D_k

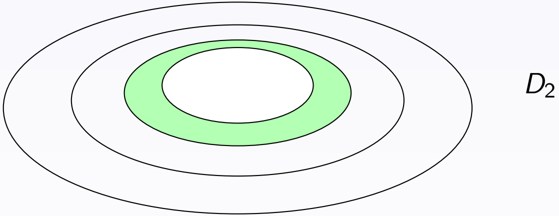
$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k := A_k \setminus A_{k-1}.$$



D_1

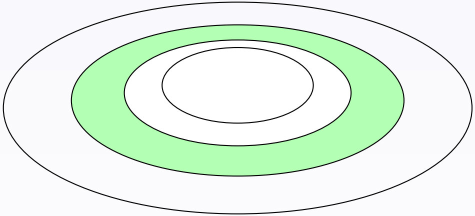
Dibujo: los conjuntos A_k y D_k

$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k-1}.$$



Dibujo: los conjuntos A_k y D_k

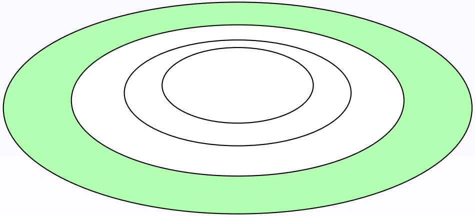
$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k := A_k \setminus A_{k-1}.$$



D_3

Dibujo: los conjuntos A_k y D_k

$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k-1}.$$



D_4

Demostración que la sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

Sean $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$. Consideremos el caso $j < k$ (el otro caso es similar).

Queremos demostrar que $D_j \cap D_k = \emptyset$.

Demostración que la sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

Sean $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$. Consideremos el caso $j < k$ (el otro caso es similar).

Queremos demostrar que $D_j \cap D_k = \emptyset$.

$\boxed{j < k}$

Demostración que la sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

Sean $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$. Consideremos el caso $j < k$ (el otro caso es similar).

Queremos demostrar que $D_j \cap D_k = \emptyset$.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{j < k} \arrow[d] \\
\boxed{j \leq k - 1}
\end{tikzcd}$$

Demostración que la sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

Sean $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$. Consideremos el caso $j < k$ (el otro caso es similar).

Queremos demostrar que $D_j \cap D_k = \emptyset$.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{j < k} \arrow[d] \\
\boxed{j \leq k - 1} \arrow[d] \\
\boxed{A_j \subseteq A_{k-1}}
\end{tikzcd}
$$

Demostración que la sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

Sean $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$. Consideremos el caso $j < k$ (el otro caso es similar).

Queremos demostrar que $D_j \cap D_k = \emptyset$.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{j < k} \arrow[d] & & \boxed{x \in D_j \cap D_k} \\
\boxed{j \leq k - 1} \arrow[d] & & \\
\boxed{A_j \subseteq A_{k-1}} & &
\end{tikzcd}$$

Demostración que la sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

Sean $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$. Consideremos el caso $j < k$ (el otro caso es similar).

Queremos demostrar que $D_j \cap D_k = \emptyset$.

$$\begin{tikzcd}
j < k \arrow[d] \\
j \le k-1 \arrow[d] \\
A_j \subseteq A_{k-1}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& x \in D_j \cap D_k \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x \in D_j & & x \in D_k
\end{tikzcd}$$

Demostración que la sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

Sean $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$. Consideremos el caso $j < k$ (el otro caso es similar).

Queremos demostrar que $D_j \cap D_k = \emptyset$.

$$
\begin{tikzcd}
j < k \arrow[d] \\
j \leq k - 1 \arrow[d] \\
A_j \subseteq A_{k-1}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & & x \in D_j \cap D_k \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & x \in D_j \arrow[dl] \arrow[dr] & & x \in D_k \\
x \in A_j & & x \notin A_{j-1} &
\end{tikzcd}
$$

Demostración que la sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

Sean $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$. Consideremos el caso $j < k$ (el otro caso es similar).

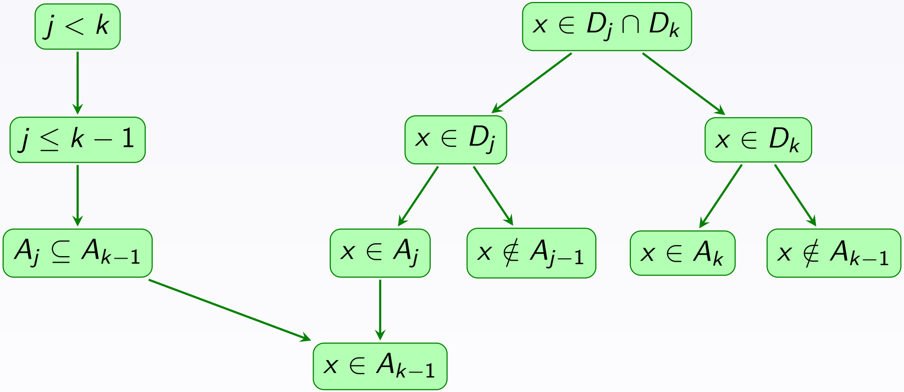
Queremos demostrar que $D_j \cap D_k = \emptyset$.

$$
\begin{tikzcd}
j < k \arrow[d] \\
j \leq k-1 \arrow[d] \\
A_j \subseteq A_{k-1}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & x \in D_j \cap D_k \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & x \in D_j \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & x \in D_k \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x \in A_j & & x \notin A_{j-1} & & x \in A_k & & x \notin A_{k-1}
\end{tikzcd}
$$

Demostración que la sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

Sean $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$. Consideremos el caso $j < k$ (el otro caso es similar).

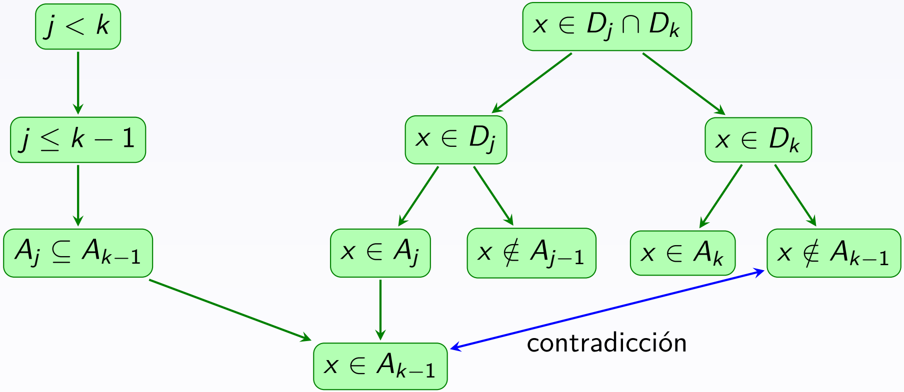
Queremos demostrar que $D_j \cap D_k = \emptyset$.



Demostración que la sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

Sean $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$. Consideremos el caso $j < k$ (el otro caso es similar).

Queremos demostrar que $D_j \cap D_k = \emptyset$.



La parte principal

La tarea más interesante es demostrar que

$$A_m \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} D_k.$$

Dado un punto x en A_m, hay que encontrar un índice k tal que $x \in D_k$.

La parte principal

La tarea más interesante es demostrar que

$$A_m \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} D_k.$$

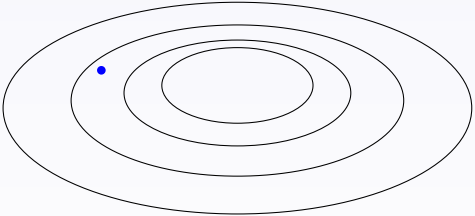
Dado un punto x en A_m, hay que encontrar un índice k tal que $x \in D_k$.

Idea: considerar el conjunto de los “índices de pertenencia”,

$$J := \left\{k \in \mathbb{N}\colon\ x \in A_k\right\}.$$

El conjunto de los índices de pertenencia para un ejemplo

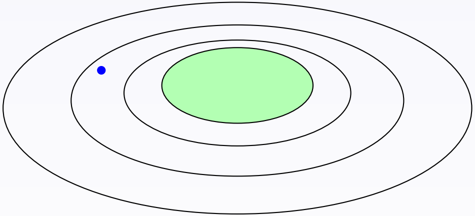
$$J := \left\{ k \in \mathbb{N}\colon\ x \in A_k \right\}.$$



Está dado $x \in A_4$

El conjunto de los índices de pertenencia para un ejemplo

$$J := \left\{ k \in \mathbb{N} \colon \; x \in A_k \right\}.$$



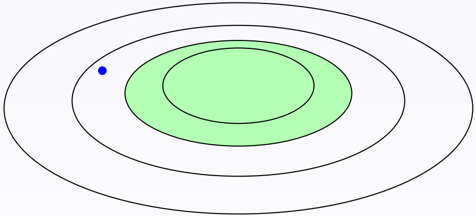
Está dado $x \in A_4$

$$x \notin A_1, \quad 1 \notin J$$

$$J = \{ \ ? \ \}$$

El conjunto de los índices de pertenencia para un ejemplo

$$J := \left\{ k \in \mathbb{N} \colon \; x \in A_k \right\}.$$



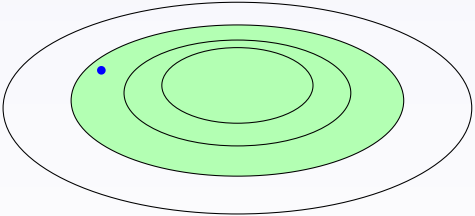
Está dado $x \in A_4$

$x \notin A_2, \quad 2 \notin J$

$J = \{ \; ? \; \}$

El conjunto de los índices de pertenencia para un ejemplo

$$J := \left\{ k \in \mathbb{N} \colon \ x \in A_k \right\}.$$



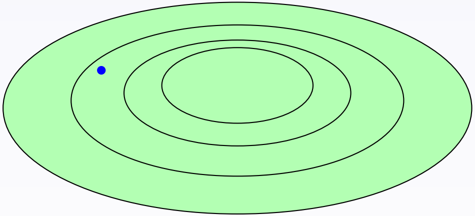
Está dado $x \in A_4$

$x \in A_3, \quad 3 \in J$

$J = \{\, 3, \ ? \,\}$

El conjunto de los índices de pertenencia para un ejemplo

$$J := \left\{ k \in \mathbb{N} \colon \; x \in A_k \right\}.$$



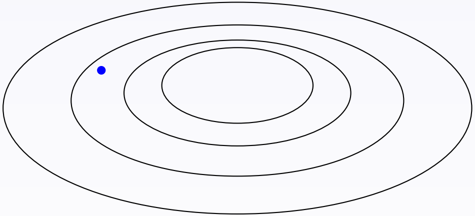
Está dado $x \in A_4$

$x \in A_4, \quad 4 \in J$

$J = \{\, 3,\ 4,\ ?\, \}$

El conjunto de los índices de pertenencia para un ejemplo

$$J := \Big\{k \in \mathbb{N}\colon\ x \in A_k\Big\}.$$

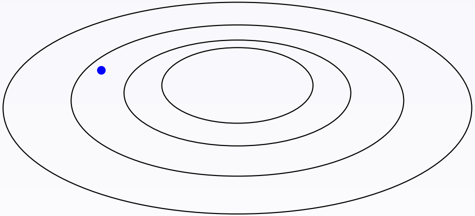


Está dado $x \in A_4$

$$J = \{\,3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots\}$$

El conjunto de los índices de pertenencia para un ejemplo

$$J := \left\{ k \in \mathbb{N} \colon \; x \in A_k \right\}.$$



Está dado $x \in A_4$

$$J = \{\, 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots \}$$

$$x \in D_3$$

Lema (sobre una sucesión creciente de conjuntos y los índices de pertenencia)

Sean $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos, $m \in \mathbb{N}$ y $x \in A_m$. Pongamos

$$J := \left\{k \in \mathbb{N}:\ \ x \in A_k\right\}.$$

Entonces J tiene las siguientes propiedades.

1. $J \neq \emptyset$.
2. J tiene un único elemento mínimo que denotemos por p.
3. $p \leq m$.
4. $J = \{k \in \mathbb{Z}:\ \ k \geq p\} = \{p, p+1, p+2, \ldots\}$.

Demostración del lema sobre los índices

$$x \in A_m, \qquad J := \Big\{k \in \mathbb{N}\colon\ x \in A_k\Big\}.$$

Demostración del lema sobre los índices

$$x \in A_m, \qquad J := \Big\{ k \in \mathbb{N} \colon \ x \in A_k \Big\}.$$

1. Por la hipótesis, $m \in J$.

Demostración del lema sobre los índices

$$x \in A_m, \qquad J := \Big\{ k \in \mathbb{N} \colon \ x \in A_k \Big\}.$$

1. Por la hipótesis, $m \in J$.
2. Como $\mathbb{N}$ es bien ordenado, $J \subseteq \mathbb{N}$, $J \neq \emptyset$, concluimos que J tiene un único elemento mínimo.

Demostración del lema sobre los índices

$$x \in A_m, \qquad J := \Big\{k \in \mathbb{N}\colon\ x \in A_k\Big\}.$$

1. Por la hipótesis, $m \in J$.

2. Como $\mathbb{N}$ es bien ordenado, $J \subseteq \mathbb{N}$, $J \neq \emptyset$, concluimos que J tiene un único elemento mínimo.

$$p := \min(J).$$

Demostración del lema sobre los índices

$$x \in A_m, \qquad J := \Big\{ k \in \mathbb{N} \colon \; x \in A_k \Big\}.$$

1. Por la hipótesis, $m \in J$.
2. Como $\mathbb{N}$ es bien ordenado, $J \subseteq \mathbb{N}$, $J \neq \emptyset$, concluimos que J tiene un único elemento mínimo.

$$p := \min(J).$$

3. Como $k \in J$ y $p = \min(J)$, obtenemos que $p \le m$.

Demostración del lema sobre los índices

$$x \in A_m, \qquad J := \left\{ k \in \mathbb{N} \colon \ x \in A_k \right\}.$$

1. Por la hipótesis, $m \in J$.
2. Como $\mathbb{N}$ es bien ordenado, $J \subseteq \mathbb{N}$, $J \neq \emptyset$, concluimos que J tiene un único elemento mínimo.
$$p := \min(J).$$
3. Como $k \in J$ y $p = \min(J)$, obtenemos que $p \leq m$.
4. Demostremos que $J \subseteq \{k \in \mathbb{N} \colon \ k \geq p\}$.

Demostración del lema sobre los índices

$$x \in A_m, \qquad J := \left\{k \in \mathbb{N}\colon\ x \in A_k\right\}.$$

1. Por la hipótesis, $m \in J$.
2. Como $\mathbb{N}$ es bien ordenado, $J \subseteq \mathbb{N}$, $J \neq \emptyset$, concluimos que J tiene un único elemento mínimo.

$$p := \min(J).$$

3. Como $k \in J$ y $p = \min(J)$, obtenemos que $p \leq m$.
4. Demostremos que $J \subseteq \{k \in \mathbb{N}\colon\ k \geq p\}$. Si $k < p$, entonces $k < \min(J)$ y $k \notin J$.

Demostración del lema sobre los índices

$$x \in A_m, \qquad J := \left\{ k \in \mathbb{N} \colon \ x \in A_k \right\}.$$

1. Por la hipótesis, $m \in J$.

2. Como $\mathbb{N}$ es bien ordenado, $J \subseteq \mathbb{N}$, $J \neq \emptyset$, concluimos que J tiene un único elemento mínimo.

$$p := \min(J).$$

3. Como $k \in J$ y $p = \min(J)$, obtenemos que $p \leq m$.

4. Demostremos que $J \subseteq \{k \in \mathbb{N} \colon \ k \geq p\}$. Si $k < p$, entonces $k < \min(J)$ y $k \notin J$.

Demostremos que $\{k \in \mathbb{N} \colon \ k \geq p\} \subseteq J$.

Demostración del lema sobre los índices

$$x \in A_m, \qquad J := \Big\{k \in \mathbb{N}\colon\ x \in A_k\Big\}.$$

1. Por la hipótesis, $m \in J$.

2. Como $\mathbb{N}$ es bien ordenado, $J \subseteq \mathbb{N}$, $J \neq \emptyset$, concluimos que J tiene un único elemento mínimo.

$$p := \min(J).$$

3. Como $k \in J$ y $p = \min(J)$, obtenemos que $p \leq m$.

4. Demostremos que $J \subseteq \{k \in \mathbb{N}\colon\ k \geq p\}$. Si $k < p$, entonces $k < \min(J)$ y $k \notin J$.

Demostremos que $\{k \in \mathbb{N}\colon\ k \geq p\} \subseteq J$.
Si $k \in \mathbb{N}$ y $k \geq p$, entonces $x \in A_p \subseteq A_k$, así que $k \in J$.

Demostración de la expresión de A_m en términos de D_k

Demostremos que

$$A_m \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} D_k.$$

Demostración de la expresión de A_m en términos de D_k

Demostremos que

$$A_m \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} D_k.$$

Sea $x \in A_m$. Como en el lema sobre los índices, pongamos

$$J := \{k \in \mathbb{N}: \quad x \in A_k\}, \qquad p := \min(J).$$

Demostración de la expresión de A_m en términos de D_k

Demostremos que

$$A_m \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} D_k.$$

Sea $x \in A_m$. Como en el lema sobre los índices, pongamos

$$J \coloneqq \{k \in \mathbb{N}: \quad x \in A_k\}, \qquad p \coloneqq \min(J).$$

Entonces $p \le m$, $x \in A_p$, $x \notin A_{p-1}$, así que $x \in D_p$.

Demostración de la expresión de A_m en términos de D_k

Demostremos que

$$A_m \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} D_k.$$

Sea $x \in A_m$. Como en el lema sobre los índices, pongamos

$$J := \{k \in \mathbb{N}: \quad x \in A_k\}, \qquad p := \min(J).$$

Entonces $p \leq m$, $x \in A_p$, $x \notin A_{p-1}$, así que $x \in D_p$.

Demostremos que

$$\bigcup_{k=1}^{m} D_k \subseteq A_m.$$

Demostración de la expresión de A_m en términos de D_k

Demostremos que

$$A_m \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} D_k.$$

Sea $x \in A_m$. Como en el lema sobre los índices, pongamos

$$J := \{k \in \mathbb{N}: \quad x \in A_k\}, \qquad p := \min(J).$$

Entonces $p \le m$, $x \in A_p$, $x \notin A_{p-1}$, así que $x \in D_p$.

Demostremos que

$$\bigcup_{k=1}^{m} D_k \subseteq A_m.$$

Sea $k \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces $D_k \subseteq A_k \subseteq A_m$.

Otra demostración de la expresión de A_m en términos de D_k

Probemos por inducción que para cada m en $\mathbb{N}$ se cumple la siguinete afirmación:

$$\mathcal{Q}(m) := \left(A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k \right).$$

Otra demostración de la expresión de A_m en términos de D_k

Probemos por inducción que para cada m en $\mathbb{N}$ se cumple la siguinete afirmación:

$$\mathcal{Q}(m) := \left(A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k \right).$$

$\mathcal{Q}(1)$: $\quad A_1 = A_1 \setminus \emptyset = A_1 \setminus A_0 = D_0.$

Otra demostración de la expresión de A_m en términos de D_k

Probemos por inducción que para cada m en $\mathbb{N}$ se cumple la siguinete afirmación:

$$\mathcal{Q}(m) := \left(A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k \right).$$

$\mathcal{Q}(1)$: $\quad A_1 = A_1 \setminus \emptyset = A_1 \setminus A_0 = D_0.$

Supongamos $\mathcal{Q}(m)$ y demostremos $\mathcal{Q}(m+1)$.

$$A_{m+1} \overset{(1)}{=\!=} A_m \cup (A_{m+1} \setminus A_m) \overset{(2)}{=\!=} A_m \cup D_{m+1} \overset{(3)}{=\!=} \left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k \right) \cup A_{m+1} \overset{(4)}{=\!=} \bigcup_{k=1}^{m+1} A_k.$$

Otra demostración de la expresión de A_m en términos de D_k

Probemos por inducción que para cada m en $\mathbb{N}$ se cumple la siguinete afirmación:

$$\mathcal{Q}(m) := \left(A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k \right).$$

$\mathcal{Q}(1)$: $\quad A_1 = A_1 \setminus \emptyset = A_1 \setminus A_0 = D_0.$

Supongamos $\mathcal{Q}(m)$ y demostremos $\mathcal{Q}(m+1)$.

$$A_{m+1} \overset{(1)}{=\!=} A_m \cup (A_{m+1} \setminus A_m) \overset{(2)}{=\!=} A_m \cup D_{m+1} \overset{(3)}{=\!=} \left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k \right) \cup A_{m+1} \overset{(4)}{=\!=} \bigcup_{k=1}^{m+1} A_k.$$

Ejercicio: justificar todos los pasos.

Repaso: ¿cómo demostrar la siguiente afirmación?

$$\bigcup_{k\in J} P_k \subseteq Q.$$

Repaso: ¿cómo demostrar la siguiente afirmación?

$$\bigcup_{k \in J} P_k \subseteq Q.$$

Respuesta: un camino cómodo es demostrar que

$$\forall k \in J \qquad P_k \subseteq Q.$$

La unión de los A_n y la unión de los D_k

Demostremos que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k .$$

La unión de los A_n y la unión de los D_k

Demostremos que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k.$$

En efecto, si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} D_k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k.$$

La unión de los A_n y la unión de los D_k

Demostremos que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k.$$

En efecto, si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} D_k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k.$$

Demostremos que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

La unión de los A_n y la unión de los D_k

Demostremos que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k.$$

En efecto, si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} D_k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k.$$

Demostremos que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

En efecto, si $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$D_k \subseteq A_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$