El espectro y la función resolvente del operador lineal acotado en un espacio de Banach

En este tema suponemos que X es un espacio de Banach.

Objetivos. Estudiar las propiedades básicas del espectro y de la función resolvente de un operador lineal acotado.

Prerrequisitos. El grupo de los elementos invertibles.

Dado S en $\mathcal{B}(X)$, denotemos por $\operatorname{Sp}(S)$ al conjunto

$$\operatorname{Sp}(S) := \{\lambda \in \mathbb{C}: \quad \lambda I - S \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))\}.$$

Definimos $R_S\colon \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(S) \to \mathcal{B}(X)$ mediante la regla

$$R_S(\lambda) := (\lambda I - S)^{-1}.$$

1 Proposición. *Sea $S \in \mathcal{B}(X)$. Entonces*

$$\operatorname{Sp}(S) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}: \ |\lambda| \le \|S\|\}$$

y

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|R_S(\lambda)\| = 0.$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > \|S\|$. En la expresión $\lambda I - S$ factorizamos λ:

$$\lambda I - S = \lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} S \right).$$

Como $\|\lambda^{-1} S\| \le \|S\|/|\lambda| < 1$, el operador $I - \lambda^{-1}S$ es invertible y

$$(I - \lambda^{-1}S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} S^k.$$

Además,

$$\|(I - \lambda^{-1}S)^{-1}\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|S\|^k}{|\lambda|^k} = \frac{1}{1 - \frac{\|S\|}{|\lambda|}} = \frac{|\lambda|}{|\lambda| - \|S\|}.$$

Luego $\lambda I - S \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$,

$$R_S(\lambda)^{-1} = (\lambda I - S)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}S\right)^{-1},$$

y se cumple

$$\|R_S(\lambda)\| \le \frac{1}{|\lambda| - \|S\|}. \tag{1}$$

Esto implica que se cumplen las afirmaciones de la proposición. □

2 Proposición. *Sean* $S \in \mathcal{B}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(S)$, $\nu \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$|\nu - \lambda| < \|R_S(\lambda)\|.$$

Entonces $\nu \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(S)$ *y*

$$\|R_S(\nu) - R_S(\lambda)\| \le \frac{|\nu - \lambda|\,\|R_S(\lambda)\|^2}{1 - |\nu - \lambda|\,\|R_S(\lambda)\|}.$$

3 Proposición. *Sea* $S \in \mathcal{B}(X)$. *Entonces el conjunto* $\operatorname{Sp}(S)$ *es cerrado, y la función* R_S *es continua.*

4 Proposición. *Sea* $S \in \mathcal{B}(X)$. *Entonces*

$$\operatorname{Sp}(S) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ |\lambda| \le \|S\|\}.$$

5 Proposición (la primera identidad para la función resolvente)**.** *Sean* $S \in \mathcal{B}(X)$, $\lambda, \nu \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(S)$. *Entonces*

$$R_S(\lambda) - R_S(\nu) = -(\lambda - \nu) R_S(\lambda) R_S(\nu).$$

6 Lema. *Sean* $S \in \mathcal{B}(X)$, $\varphi \in X^*$. *Definimos* $r_{S,\varphi}\colon \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(S) \to \mathbb{C}$,

$$r_{S,\varphi}(\lambda) \coloneqq \varphi(R_S(\lambda)).$$

Entonces la función $r_{S,\varphi}$ *es holomorfa y*

$$\lim_{\lambda \to \infty} |r_{S,\varphi}(\lambda)| = 0.$$

7 Proposición. *Sea* $S \in \mathcal{B}(X)$. *Entonces* $\operatorname{Sp}(S) \ne \varnothing$.

8 Ejercicio. Calcule el espectro de los operadores de desplazamiento a la izquierda y a la derecha en el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$.

9 Ejercicio. Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Calcule el espectro del operador de multiplicación M_a en el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$.