El espectro del operador de multiplicación en L^p

Egor Maximenko

http://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

23 de noviembre de 2020

Plan

Objetivos

Dado un espacio de medida σ-finita $(X, \mathcal{F}, \mu)$, para cada a en $L^\infty(X, \mu)$ se define el operador de multiplicación

$$M_a \colon L^p(X, \mu) \to L^p(X, \mu), \qquad M_a f \coloneqq af.$$

Objetivos

Dado un espacio de medida σ-finita $(X, \mathcal{F}, \mu)$,
para cada a en $L^\infty(X, \mu)$ se define el operador de multiplicación

$$M_a \colon L^p(X, \mu) \to L^p(X, \mu), \qquad M_a f := af.$$

Objetivos:

- calcular su norma,
- establecer su criterio de invertibilidad,
- y encontrar su espectro.

Prerrequisitos

- Espacios de medida σ-finita.
- Espacios $L^p(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, $1 \leq p < +\infty$.
- Espacio $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ y la norma en este espacio.
- El rango esencial de una función medible.
- Operadores lineales acotados y su norma.
- Operadores lineales acotados invertibles.
- El espectro de un operador lineal acotado.

Plan

Espacios de medida σ-finita

En este tema suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finita: existe $(V_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ tal que

- $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mu(V_k) < +\infty$,
- $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k = X$,
- $\forall k \in \mathbb{N} \quad V_k \subseteq V_{k+1}$.

Una propiedad de espacios de medida σ-finita

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(Y) > 0$.
Entonces existe $Z \in \mathcal{F}$ tal que $\quad Z \subseteq Y \quad$ y $\quad 0 < \mu(Z) < +\infty$.

Una propiedad de espacios de medida σ-finita

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(Y) > 0$.
Entonces existe $Z \in \mathcal{F}$ tal que $\quad Z \subseteq Y \quad$ y $\quad 0 < \mu(Z) < +\infty$.

Demostración. $(Y \cap V_k)_{k \in \mathbb{N}}$

Una propiedad de espacios de medida σ-finita

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(Y) > 0$.
Entonces existe $Z \in \mathcal{F}$ tal que $\quad Z \subseteq Y \quad$ y $\quad 0 < \mu(Z) < +\infty$.

Demostración. $(Y \cap V_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow$, $\quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(Y \cap V_k) = Y$. $\quad$ Por eso

$$\lim_{k\to\infty} \mu(Y \cap V_k) = \mu(Y) > 0.$$

Como $\mu(Y) > 0$, existe m en $\mathbb{N}$ tal que $\mu(Y \cap V_m) > 0$.

Una propiedad de espacios de medida σ-finita

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(Y) > 0$. Entonces existe $Z \in \mathcal{F}$ tal que $\quad Z \subseteq Y \quad$ y $\quad 0 < \mu(Z) < +\infty$.

Demostración. $(Y \cap V_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow$, $\quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(Y \cap V_k) = Y$. Por eso

$$\lim_{k\to\infty} \mu(Y \cap V_k) = \mu(Y) > 0.$$

Como $\mu(Y) > 0$, existe m en $\mathbb{N}$ tal que $\mu(Y \cap V_m) > 0$. $Z := Y \cap V_m$.

$$\mu(Z) \leq \mu(V_m) < +\infty.$$

Funciones medibles iguales μ-c.t.p.

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

$$f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} g \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \mu(\{x \in X : \quad f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

La clase de las funciones que se anulan μ-c.t.p.:

$$\mathcal{Z}(X, \mu) := \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \quad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X\}.$$

Espacios $L^p(X, \mu)$

Fijamos $p \in [1, +\infty)$. Vamos a trabajar con los espacios

$$L^p(X, \mu) := L^p(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}), \qquad L^\infty(X, \mu) := L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}).$$

Espacios $L^p(X,\mu)$

Fijamos $p \in [1,+\infty)$. Vamos a trabajar con los espacios

$$L^p(X,\mu) \coloneqq L^p(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C}), \qquad L^\infty(X,\mu) \coloneqq L^\infty(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C}).$$

Pasamos libremente de una función medible f
a su clase de equivalencia $f + \mathcal{Z}(X,\mu)$.

La norma en $L^\infty(X,\mu)$

$$N_\infty(a) := \operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} |a|,$$

esto es,

$$N_\infty(a) := \inf\{C \geq 0 \quad \mu(\{x \in X\colon \ |a(x)| > C\}) = 0\}.$$

La norma en $L^\infty(X,\mu)$

$$N_\infty(a) := \operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} |a|,$$

esto es,

$$N_\infty(a) := \inf\{C \geq 0 \quad \mu(\{x \in X\colon\ |a(x)| > C\}) = 0\}.$$

En otras palabras, $N_\infty(a)$ es el ínfimo del conjunto de las cotas superiores esenciales de $|a|$.

La norma en $L^\infty(X,\mu)$

$$N_\infty(a) := \operatorname{ess\,sup}_{X,\mu} |a|,$$

esto es,

$$N_\infty(a) := \inf\{C \geq 0 \quad \mu(\{x \in X\colon\ |a(x)| > C\}) = 0\}.$$

En otras palabras, $N_\infty(a)$ es el ínfimo del conjunto de las cotas superiores esenciales de $|a|$.

Sabemos que $N_\infty(a)$ es una cota superior esencial de $|a|$:

$$\mu(\{x \in X\colon\ |a(x)| > \|a\|_\infty\}) = 0.$$

El rango esencial de una función medible

Sea $a \in L^\infty(X, \mu)$.

$$\mathcal{R}(a) := \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} \colon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{x \in X \colon \ |a(x) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0 \Big\}.$$

Es posible demostrar que $\mathcal{R}(a)$ es un compacto en $\mathbb{C}$.

Los operadores invertibles por la izquierda son acotados por abajo

Proposición

Sea V un espacio normado y sea $A \in \mathcal{B}(V)$.

Supongamos que A es invertible por la izquierda en el álgebra $\mathcal{B}(V)$.

Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada v en V se cumple la desigualdad

$$\|Av\| \geq \varepsilon \|v\|.$$

Los operadores invertibles por la izquierda son acotados por abajo

Proposición

Sea V un espacio normado y sea $A \in \mathcal{B}(V)$.

Supongamos que A es invertible por la izquierda en el álgebra $\mathcal{B}(V)$.

Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada v en V se cumple la desigualdad

$$\|Av\| \geq \varepsilon \|v\|.$$

Demostración. Sea $S \in \mathcal{B}(V)$ tal que $SA = I$.

Los operadores invertibles por la izquierda son acotados por abajo

Proposición

Sea V un espacio normado y sea $A \in \mathcal{B}(V)$.

Supongamos que A es invertible por la izquierda en el álgebra $\mathcal{B}(V)$.

Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada v en V se cumple la desigualdad

$$\|Av\| \geq \varepsilon \|v\|.$$

Demostración. Sea $S \in \mathcal{B}(V)$ tal que $SA = I$.

Entonces para cada v en V tenemos $v = SAv$, de donde

Los operadores invertibles por la izquierda son acotados por abajo

Proposición

Sea V un espacio normado y sea $A \in \mathcal{B}(V)$.

Supongamos que A es invertible por la izquierda en el álgebra $\mathcal{B}(V)$.

Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada v en V se cumple la desigualdad

$$\|Av\| \geq \varepsilon \|v\|.$$

Demostración. Sea $S \in \mathcal{B}(V)$ tal que $SA = I$.

Entonces para cada v en V tenemos $v = SAv$, de donde $\|v\| \leq \|S\| \|Av\|$, esto es,

Los operadores invertibles por la izquierda son acotados por abajo

Proposición

Sea V un espacio normado y sea $A \in \mathcal{B}(V)$.

Supongamos que A es invertible por la izquierda en el álgebra $\mathcal{B}(V)$.

Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada v en V se cumple la desigualdad

$$\|Av\| \geq \varepsilon \|v\|.$$

Demostración. Sea $S \in \mathcal{B}(V)$ tal que $SA = I$.

Entonces para cada v en V tenemos $v = SAv$, de donde $\|v\| \leq \|S\| \|Av\|$, esto es,

$$\|Av\| \geq \frac{1}{\|S\|} \|v\|.$$

Plan

El operador de multiplicación por a y su norma

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita, $\mu(X) > 0$, $1 \leq p < +\infty$.

El operador de multiplicación por a y su norma

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita, $\mu(X) > 0$, $1 \le p < +\infty$.

Dada a en $L^\infty(X, \mu)$, definimos $M_a \colon L^p(X, \mu) \to L^p(X, \mu)$,

$$M_a f := af.$$

De manera más detallada,

$$(M_a f)(x) := a(x) f(x) \qquad (x \in X,\ f \in L^p(X, \mu)).$$

Proposición

Sea $a \in L^\infty(X, \mu)$. Entonces $M_a \in \mathcal{B}(L^p(X, \mu))$ y $\|M_a\| = \|a\|_\infty$.

Demostración de $\|M_a\| \le \|a\|_\infty$

Sea

$$Y := \{x \in X \colon \; |a(x)| \le \|a\|_\infty\}.$$

Por la definición de $\|a\|_\infty$, tenemos $\mu(X \setminus Y) = 0$.

Demostración de $\|M_a\| \leq \|a\|_\infty$

Sea

$$Y := \{x \in X \colon\ |a(x)| \leq \|a\|_\infty\}.$$

Por la definición de $\|a\|_\infty$, tenemos $\mu(X \setminus Y) = 0$. Si $f \in L^p(X, \mu)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|M_a f\|_p^p &= \int_X |a|^p\, |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_Y |a|^p\, |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_{X\setminus Y} |a|^p\, |f|^p \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_Y |a|^p\, |f|^p \,\mathrm{d}\mu \leq \|a\|_\infty^p \int_Y |f|^p \,\mathrm{d}\mu \\
&= \|a\|_\infty^p \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \|a\|_\infty^p\, \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Elevamos ambos lados a la potencia $1/p$ y obtenemos $\|M_a f\|_p \leq \|a\|_\infty \|f\|_p$.

Demostración de $\|M_a\| \geq \|a\|_\infty$, inicio

Sea $\varepsilon > 0$.

$$Y := \{x \in X\colon\ |a(x)| \geq \|a\|_\infty - \varepsilon\}.$$

El número $\|a\|_\infty - \varepsilon$ no es una cota superior esencial para a, por eso $\mu(Y) > 0$.

Demostración de $\|M_a\| \ge \|a\|_\infty$, inicio

Sea $\varepsilon > 0$.

$$Y := \{x \in X\colon\ |a(x)| \ge \|a\|_\infty - \varepsilon\}.$$

El número $\|a\|_\infty - \varepsilon$ no es una cota superior esencial para a, por eso $\mu(Y) > 0$.

Usando la suposición que la medida μ es σ-finita, encontramos $Z \in \mathcal{F}$ tal que $Z \subseteq Y$, $0 < \mu(Z) < +\infty$. Entonces

$$\forall x \in Z \qquad |a(x)| \ge \|a\|_\infty - \varepsilon.$$

Demostración de $\|M_a\| \geq \|a\|_\infty$, inicio

Sea $\varepsilon > 0$.

$$Y \coloneqq \{x \in X\colon\ |a(x)| \geq \|a\|_\infty - \varepsilon\}.$$

El número $\|a\|_\infty - \varepsilon$ no es una cota superior esencial para a, por eso $\mu(Y) > 0$.

Usando la suposición que la medida μ es σ-finita, encontramos $Z \in \mathcal{F}$ tal que $Z \subseteq Y$, $0 < \mu(Z) < +\infty$. Entonces

$$\forall x \in Z \qquad |a(x)| \geq \|a\|_\infty - \varepsilon.$$

Consideremos la función indicadora 1_Z del conjunto Z.

Demostración de $\|M_a\| \geq \|a\|_\infty$, final

Consideramos 1_Z.

$$\|1_Z\|_p^p = \int_X 1_Z \, \mathrm{d}\mu = \mu(Z).$$

Demostración de $\|M_a\| \geq \|a\|_\infty$, final

Consideramos 1_Z.

$$\|1_Z\|_p^p = \int_X 1_Z \,\mathrm{d}\mu = \mu(Z).$$

Nos importa que $0 < \|1_Z\|_p < +\infty$.

Acotemos por abajo la norma de $M_a 1_Z$:

$$\|M_a 1_Z\|_p^p = \int_Z |a|^p \,\mathrm{d}\mu \geq (\|a\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(Z).$$

Demostración de $\|M_a\| \geq \|a\|_\infty$, final

Consideramos 1_Z.

$$\|1_Z\|_p^p = \int_X 1_Z \,\mathrm{d}\mu = \mu(Z).$$

Nos importa que $0 < \|1_Z\|_p < +\infty$.

Acotemos por abajo la norma de $M_a 1_Z$:

$$\|M_a 1_Z\|_p^p = \int_Z |a|^p \,\mathrm{d}\mu \geq (\|a\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(Z).$$

Luego

$$\|M_a\| \geq \frac{\|M_a 1_Z\|_p}{\|1_Z\|_p} \geq \frac{(\|a\|_\infty - \varepsilon)\,\mu(Z)^{1/p}}{\mu(Z)^{1/p}} = \|a\|_\infty - \varepsilon.$$

Demostración de $\|M_a\| \geq \|a\|_\infty$, final

Consideramos 1_Z.

$$\|1_Z\|_p^p = \int_X 1_Z \, \mathrm{d}\mu = \mu(Z).$$

Nos importa que $0 < \|1_Z\|_p < +\infty$.

Acotemos por abajo la norma de $M_a 1_Z$:

$$\|M_a 1_Z\|_p^p = \int_Z |a|^p \, \mathrm{d}\mu \geq (\|a\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(Z).$$

Luego

$$\|M_a\| \geq \frac{\|M_a 1_Z\|_p}{\|1_Z\|_p} \geq \frac{(\|a\|_\infty - \varepsilon)\, \mu(Z)^{1/p}}{\mu(Z)^{1/p}} = \|a\|_\infty - \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, hemos demostrado $\|M_a\| \geq \|a\|_\infty$.

Plan

Operaciones algebraicas con operadores de multiplicación

Proposición

Sean $a, b \in L^\infty(X, \mu)$, $\xi \in \mathbb{C}$. Entonces

$$M_{a+b} = M_a + M_b, \qquad M_{\lambda a} = \lambda M_a, \qquad M_{ab} = M_a M_b.$$

Operaciones algebraicas con operadores de multiplicación

Proposición

Sean $a, b \in L^\infty(X, \mu)$, $\xi \in \mathbb{C}$. Entonces

$$M_{a+b} = M_a + M_b, \qquad M_{\lambda a} = \lambda M_a, \qquad M_{ab} = M_a M_b.$$

Demostración: ejercicio.

Operaciones algebraicas con operadores de multiplicación

Proposición

Sean $a, b \in L^\infty(X, \mu)$, $\xi \in \mathbb{C}$. Entonces

$$M_{a+b} = M_a + M_b, \qquad M_{\lambda a} = \lambda M_a, \qquad M_{ab} = M_a M_b.$$

Demostración: ejercicio.

Por consecuencia, $M_a M_b = M_b M_a$.

Operaciones algebraicas con operadores de multiplicación

Proposición

Sean $a, b \in L^\infty(X, \mu)$, $\xi \in \mathbb{C}$. Entonces

$$M_{a+b} = M_a + M_b, \qquad M_{\lambda a} = \lambda M_a, \qquad M_{ab} = M_a M_b.$$

Demostración: ejercicio.

Por consecuencia, $M_a M_b = M_b M_a$.

Otra propiedad: $M_{1_X} = I$, donde I es el operador identidad de $L^p(X, \mu)$.

Criterio de igualdad de dos operadores de multiplicación

Proposición

Sean $a, b \in L^\infty(X, \mu)$, $\xi \in \mathbb{C}$. Entonces

$$M_a = M_b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} b.$$

Criterio de igualdad de dos operadores de multiplicación

Proposición

Sean $a, b \in L^\infty(X, \mu)$, $\xi \in \mathbb{C}$. Entonces

$$M_a = M_b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} b.$$

Idea de demostración: $\|M_a - M_b\| = \|M_{a-b}\| = \|a - b\|_\infty$.

Criterio de igualdad de dos operadores de multiplicación

Proposición

Sean $a, b \in L^\infty(X, \mu)$, $\xi \in \mathbb{C}$. Entonces

$$M_a = M_b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} b.$$

Idea de demostración: $\|M_a - M_b\| = \|M_{a-b}\| = \|a - b\|_\infty$.

Corolario: si $ab \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 1_X$, entonces $M_a M_b = I$.

Plan

Criterio de invertibilidad del operador de multiplicación

Proposición

Sea $a \in L^\infty(X, \mu)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) M_a es invertible,

(b) existe $\varepsilon > 0$ tal que la desigualdad $|a| \geq \varepsilon$ se cumple μ-c.t.p.

(c) $0 \notin \mathcal{R}(a)$.

Criterio de invertibilidad del operador de multiplicación

Proposición

Sea $a \in L^\infty(X, \mu)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) M_a es invertible,

(b) existe $\varepsilon > 0$ tal que la desigualdad $|a| \geq \varepsilon$ se cumple μ-c.t.p.

(c) $0 \notin \mathcal{R}(a)$.

Ejercicio: (b)$\Leftrightarrow$(c).

(a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que (b) no se cumple.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $Y \in \mathcal{F}$ tal que $0 < \mu(Y) < +\infty$
y para cada x en Y, $\quad |a(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

(a)⇒(b)

Supongamos que (b) no se cumple.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $Y \in \mathcal{F}$ tal que $0 < \mu(Y) < +\infty$

y para cada x en Y, $\quad |a(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$.

Entonces

$$\|1_Y\|_p = \mu(Y)^{1/p}, \qquad \|M_a 1_Y\|_p \le \frac{\varepsilon}{2}\,\mu(Y)^{1/p},$$

así que

$$\frac{\|M_a 1_Y\|_p}{\|1_Y\|_p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

M_a no es acotado por abajo, luego no es invertible.

(b)⇒(a).

Supongamos que se cumple (b). Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mu(\{x \in X \colon \quad |a(x)| < \varepsilon\}) = 0.$$

Pongamos

(b)⇒(a).

Supongamos que se cumple (b). Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mu(\{x \in X: \quad |a(x)| < \varepsilon\}) = 0.$$

Pongamos

$$b(x) := \begin{cases} 1/a(x), & a(x) \neq 0; \\ 0, & a(x) = 0. \end{cases}$$

(b)⇒(a).

Supongamos que se cumple (b). Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mu(\{x \in X : \quad |a(x)| < \varepsilon\}) = 0.$$

Pongamos

$$b(x) := \begin{cases} 1/a(x), & a(x) \neq 0; \\ 0, & a(x) = 0. \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $\|b\|_\infty \leq 1/\varepsilon$. Luego $M_b \in \mathcal{B}(L^p(X, \mu))$.

(b)⇒(a).

Supongamos que se cumple (b). Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mu(\{x \in X\colon \quad |a(x)| < \varepsilon\}) = 0.$$

Pongamos

$$b(x) := \begin{cases} 1/a(x), & a(x) \neq 0; \\ 0, & a(x) = 0. \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $\|b\|_\infty \le 1/\varepsilon$. Luego $M_b \in \mathcal{B}(L^p(X,\mu))$.

Además, $ab \xlongequal{\text{1-c.t.p.}}_X$. Por eso $M_a M_b = M_{1_X} = I$.

Plan

El espectro del operador de multiplicación

Dado un operador A de clase $\mathcal{B}(V)$, su espectro se define de la siguiente manera:

$$\operatorname{sp}(A) \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad \lambda I - A \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(V))\}.$$

El espectro del operador de multiplicación

Dado un operador A de clase $\mathcal{B}(V)$, su espectro se define de la siguiente manera:

$$\operatorname{sp}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad \lambda I - A \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(V))\}.$$

Proposición

Sea $a \in L^\infty(X, \mu)$. Entonces

$$\operatorname{sp}(M_a) = \mathcal{R}(a).$$

Demostración

Para cada λ en $\mathbb{C}$,

$$\lambda \in \mathrm{sp}(M_a)$$

Demostración

Para cada λ en $\mathbb{C}$,

$$\lambda \in \operatorname{sp}(M_a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda I - M_a \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(L^p(X,\mu)))$$

Demostración

Para cada λ en $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{sp}(M_a) \qquad &\iff \qquad \lambda I - M_a \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(L^p(X,\mu))) \\ &\iff \qquad M_{\lambda 1_X - a} \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(L^p(X,\mu))) \end{aligned}$$

Demostración

Para cada λ en $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{sp}(M_a) \quad &\iff \quad \lambda I - M_a \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(L^p(X,\mu))) \\ &\iff \quad M_{\lambda 1_X - a} \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(L^p(X,\mu))) \\ &\iff \quad 0 \in \mathcal{R}(\lambda 1_X - a) \end{aligned}$$

Demostración

Para cada λ en $\mathbb{C}$,

$$
\begin{aligned}
\lambda \in \operatorname{sp}(M_a) \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda I - M_a \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(L^p(X,\mu))) \\
&\Longleftrightarrow \quad M_{\lambda 1_X - a} \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(L^p(X,\mu))) \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 \in \mathcal{R}(\lambda 1_X - a) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{x \in X : \ |a(x) - \lambda| \geq \varepsilon\}) > 0
\end{aligned}
$$

Demostración

Para cada λ en $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\lambda \in \operatorname{sp}(M_a) \quad &\iff \quad \lambda I - M_a \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(L^p(X,\mu))) \\
&\iff \quad M_{\lambda 1_X - a} \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(L^p(X,\mu))) \\
&\iff \quad 0 \in \mathcal{R}(\lambda 1_X - a) \\
&\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{x \in X : \ |a(x) - \lambda| \geq \varepsilon\}) > 0 \\
&\iff \quad \lambda \in \mathcal{R}(a).
\end{aligned}$$