El espectro de un elemento de un álgebra C* en una C*-subálgebra

1 Proposición (repaso). *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e, $\mathcal{S}$ una subálgebra cerrada de $\mathcal{A}$ tal que $e \in \mathcal{S}$, y $a \in \mathcal{S}$. Entonces $\mathrm{Sp}_{\mathcal{S}}(a)$ es la unión de $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$ y de alguna colección de componentes acotadas del complemento de $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$. En particular, la frontera de $\mathrm{Sp}_{\mathcal{S}}(a)$ está contenida en $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$.*

2 Corolario (repaso). *Si $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$ no separa el plano, esto es, $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$ es conexo, entonces $\mathrm{Sp}_{\mathcal{S}}(a) = \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$.*

3 Corolario (repaso). *Si $\mathrm{Sp}_{\mathcal{S}}(a)$ tiene interior vacío, entonces $\mathrm{Sp}_{\mathcal{S}}(a) = \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$.*

4 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* con identidad e, sea $\mathcal{S}$ una subálgebra C* de $\mathcal{A}$ tal que $e \in \mathcal{S}$, y sea $a \in \mathcal{S}$. Entonces a es invertible en $\mathcal{S}$ si, y solo si, a es invertible en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Supongamos que $a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Pongamos $b \coloneqq a^*a$. Entonces $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, y

$$b^{-1} = (a^*a)^{-1} = a^{-1}(a^*)^{-1}.$$

Por eso

$$a^{-1} = b^{-1}a^*. \tag{1}$$

Queremos mostrar que $a^{-1} \in \mathcal{S}$. Como $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, tenemos que $0 \notin \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(b)$. Como b es autoadjunto, su espectro no separa el plano, y $\mathrm{Sp}_{\mathcal{S}}(b) = \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(b)$. Por eso $0 \notin \mathrm{Sp}_{\mathcal{S}}(b)$, y $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{S})$. Luego $b^{-1} \in \mathcal{S}$ y por (1) concluimos que $a^{-1} \in \mathcal{S}$. □

5 Corolario. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* con identidad e, sea $\mathcal{S}$ una subálgebra C* de $\mathcal{A}$ tal que $e \in \mathcal{S}$, y sea $a \in \mathcal{S}$. Entonces*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{S}}(a) = \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a).$$

Demostración. Para cada λ en $\mathbb{C}$, la condición $\lambda e - a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{S})$ es equivalente a la condición $\lambda e - a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. □