Algunos espacios normados de funciones
(un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

21 de febrero de 2022

Objetivos

Recordar las definciones de varios espacios de funciones.

- Espacios de funciones acotadas, $B(X)$.
- Espacios de funciones continuas acotadas, $C_b(X)$, y sus subespacios.
- Espacios de Hölder (en particular, de Lipschitz).
- Espacios de funciones derivables.
- Espacios de funciones de variación acotada.

Analizar la completez de estos espacios.

Prerrequisitos

- El concepto del espacio normado.
- Conceptos básicos de espacios topológicos y métricos.
- Espacios completos.
- Espacios topológicos compactos y localmente compactos.
- Funciones derivables, propiedades de la derivada.
- Variación total, funciones de variación acotada.
- Funciones absolutamente continuas.

Definición de la norma (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo.

Una función $N\colon V \to [0,+\infty)$ se llama norma en V si

(N1) es subaditiva:

$$\forall a, b \in V \qquad N(a+b) \le N(a) + N(b),$$

(N2) es absolutamente homogénea:

$$\forall a \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad N(\lambda a) = |\lambda| N(a),$$

(N3) es estrictamente positiva:

$$\forall a \in V \setminus \{0_V\} \qquad N(a) > 0.$$

La distancia inducida por una norma (repaso)

Si $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces la métrica inducida por $\|\cdot\|$ se define como

$$d(a, b) := \|a - b\|.$$

Cuando se trata de conceptos métricos o topológicos en V, por defecto se trata de esta métrica.

Definición (espacio de Banach)

Sea $(V, \|\cdot\|)$. Se dice que V es completo si el espacio métrico (V, d) es completo. Espacios normados completos se llaman espacios de Banach.

Subespacios de espacios normados

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio vectorial de V.

Entonces $(W, N|_W)$ es un espacio normado.

Más aún, la norma $N|_W$ induce la distancia $d|_{W\times W}$.

Subespacios de espacios normados

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio vectorial de V.

Entonces $(W, N|_W)$ es un espacio normado.

Más aún, la norma $N|_W$ induce la distancia $d|_{W\times W}$.

Proposición

Sea (V, N) un espacio de Banach y sea W un subespacio cerrado de V, esto es,

- W es un subespacio vectorial de V,
- W es un subconjunto cerrado de (V, d).

Entonces $(W, N|_W)$ es un espacio de Banach.

Subespacios de espacios normados

Para que el subespacio W sea completo, es necesario que sea cerrado en V.

Es una propiedad general de espacios métricos.

Subespacios de espacios normados

Para que el subespacio W sea completo, es necesario que sea cerrado en V.

Es una propiedad general de espacios métricos.

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio vectorial de V.

Supongamos que W con la norma inducida es completo. Entonces W es cerrado en V.

Subespacios de espacios normados

Para que el subespacio W sea completo, es necesario que sea cerrado en V.

Es una propiedad general de espacios métricos.

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio vectorial de V.

Supongamos que W con la norma inducida es completo. Entonces W es cerrado en V.

Demostración. Sea $v \in \operatorname{clos}(W)$. Encontramos $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} u_m = v.$$

Subespacios de espacios normados

Para que el subespacio W sea completo, es necesario que sea cerrado en V.

Es una propiedad general de espacios métricos.

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio vectorial de V.

Supongamos que W con la norma inducida es completo. Entonces W es cerrado en V.

Demostración. Sea $v \in \operatorname{clos}(W)$. Encontramos $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} u_m = v.$$

Como $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge, es de Cauchy y tiene un límite w en W.

Subespacios de espacios normados

Para que el subespacio W sea completo, es necesario que sea cerrado en V.
Es una propiedad general de espacios métricos.

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio vectorial de V.
Supongamos que W con la norma inducida es completo. Entonces W es cerrado en V.

Demostración. Sea $v \in \operatorname{clos}(W)$. Encontramos $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} u_m = v.$$

Como $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge, es de Cauchy y tiene un límite w en W.
Por la unicidad del límite, $v = w$. $\square$

La imagen de la suma de dos funciones

Sea X un conjunto no vacío.

Proposición

Sean $f, g\colon X \to \mathbb{C}$. Entonces $\quad (f+g)[X] \subseteq f[X] + g[X].$

La imagen de la suma de dos funciones

Sea X un conjunto no vacío.

Proposición

Sean $f,g\colon X\to\mathbb{C}$. Entonces $\quad (f+g)[X]\subseteq f[X]+g[X]$.

Demostración. Se sigue fácilmente de las siguientes descripciones:

$$(f+g)[X]=\{w\in\mathbb{C}\colon\quad \exists x\in X\quad f(x)+g(x)=w\},$$

$$\begin{aligned} f[X]+g[X]&=\{w\in\mathbb{C}\colon\quad \exists u\in f[X]\quad \exists v\in g[X]\quad w=u+v\}\\ &=\{w\in\mathbb{C}\colon\quad \exists x\in X\quad \exists y\in X\quad f(x)+g(y)=w\}.\end{aligned}$$

□

La imagen del producto de una función por un escalar

Proposición

Sean $f\colon X \to \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $\quad (\lambda f)[X] = \lambda f[X]$.

La imagen del producto de una función por un escalar

Proposición

Sean $f\colon X \to \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $\quad (\lambda f)[X] = \lambda f[X]$.

Demostración. Si $\lambda = 0$, entonces ambos lados son $\{0\}$. Sea $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned}(\lambda f)[X] &= \{v \in \mathbb{C}\colon \quad \exists x \in X \quad \lambda f(x) = v\} \\ &= \left\{v \in \mathbb{C}\colon \quad \exists x \in X \quad f(x) = \frac{v}{\lambda}\right\} \\ &= \left\{v \in \mathbb{C}\colon \quad \frac{v}{\lambda} \in f[X]\right\} = \lambda f[X].\end{aligned}$$

$\square$

La norma extendida definida como el supremo

Dada $f\colon X\to\mathbb{C}$, $\quad N(f) := \sup_{x\in X} |f(x)| := \sup\Big\{v\in[0,+\infty)\colon\quad \exists x\in X\quad |f(x)| = v\Big\}.$

La norma extendida definida como el supremo

$$\text{Dada } f\colon X \to \mathbb{C}, \quad N(f) := \sup_{x \in X} |f(x)| := \sup\Big\{ v \in [0, +\infty) \colon \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v \Big\}.$$

Proposición

Sean $f, g \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $N(f+g) \le N(f) + N(g)$.

La norma extendida definida como el supremo

Dada $f\colon X \to \mathbb{C}$, $\quad N(f) := \sup_{x\in X} |f(x)| := \sup\Big\{v \in [0,+\infty)\colon \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$

Proposición

Sean $f, g \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $N(f+g) \le N(f) + N(g)$.

Demostración. Para cada x en X,

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le N(f) + N(g).$$

La norma extendida definida como el supremo

Dada $f\colon X \to \mathbb{C}$, $\quad N(f) := \sup_{x\in X} |f(x)| := \sup\Big\{ v \in [0,+\infty): \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v \Big\}.$

Proposición

Sean $f, g \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $N(f+g) \le N(f) + N(g)$.

Demostración. Para cada x en X,

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le N(f) + N(g).$$

Luego $N(f) + N(g)$ es una cota superior de

$$\{ v \in [0,+\infty): \qquad \exists x \in X \qquad |(f+g)(x)| = v \}. \qquad \square$$

Proposición

Sean $f \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

Proposición

Sean $f \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

Demostración. 1. Si $\lambda = 0$, ambos lados son 0. Suponemos $\lambda \neq 0$.

Proposición

Sean $f \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

Demostración. 1. Si $\lambda = 0$, ambos lados son 0. Suponemos $\lambda \neq 0$.

2. Demostremos que $N(\lambda f) \leq |\lambda| N(f)$. En efecto, para cada x en X,

$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda|\,|f(x)| \leq |\lambda| N(f).$$

Proposición

Sean $f \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

Demostración. 1. Si $\lambda = 0$, ambos lados son 0. Suponemos $\lambda \neq 0$.

2. Demostremos que $N(\lambda f) \leq |\lambda| N(f)$. En efecto, para cada x en X,

$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda|\,|f(x)| \leq |\lambda| N(f).$$

3. Usamos el hecho que $f = \frac{1}{\lambda}(\lambda f)$.

$$|\lambda| N(f) = |\lambda| N\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\right) \leq |\lambda| \cdot \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda f) = N(\lambda f).$$

□

El espacio $B(X)$

Dada una función $f\colon X \to \mathbb{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f[X]$ es un conjunto acotado en $\mathbb{C}$;

(b) f es acotada: $\quad \exists M \geq 0 \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leq M$;

(c) $N(f) < +\infty$.

El espacio $B(X)$

Dada una función $f\colon X \to \mathbb{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f[X]$ es un conjunto acotado en $\mathbb{C}$;

(b) f es acotada: $\exists M \geq 0 \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leq M$;

(c) $N(f) < +\infty$.

$$B(X) \;:=\; \{f \in \mathbb{C}^X \colon\; N(f) < +\infty\}.$$

El espacio $B(X)$

Dada una función $f\colon X \to \mathbb{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f[X]$ es un conjunto acotado en $\mathbb{C}$;

(b) f es acotada: $\quad \exists M \ge 0 \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \le M$;

(c) $N(f) < +\infty$.

$$B(X) \; := \; \{f \in \mathbb{C}^X : \; N(f) < +\infty\}.$$

La norma $\|\cdot\|_{\sup}$ en $B(X)$ se define como la restricción de N.

$$\|f\|_{\sup} \; := \; \sup\Big\{v \in [0,+\infty) : \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

La norma-supremo domina a los valores en cada punto

Proposición

Para cada x en X y cada f en $B(X)$,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\text{sup}}.$$

La norma-supremo domina a los valores en cada punto

Proposición

Para cada x en X y cada f en $B(X)$,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\text{sup}}.$$

Se sigue de la definición de $\|f\|_{\text{sup}}$.

El medidor de Cauchy de una sucesión (repaso)

Dado un espacio métrico (M, d) y una sucesión $a \in M^{\mathbb{N}}$,

$$\gamma_a(k) \ := \ \sup\Big\{ d(a_m, a_n) \colon \ m, n \geq k \Big\}.$$

El medidor de Cauchy de una sucesión (repaso)

Dado un espacio métrico (M, d) y una sucesión $a \in M^{\mathbb{N}}$,

$$\gamma_a(k) \;:=\; \sup\Big\{d(a_m, a_n) \colon\; m, n \geq k\Big\}.$$

Sabemos que a es de Cauchy si, y sólo si,

El medidor de Cauchy de una sucesión (repaso)

Dado un espacio métrico (M, d) y una sucesión $a \in M^{\mathbb{N}}$,

$$\gamma_a(k) \;:=\; \sup\Big\{ d(a_m, a_n) \colon\; m, n \geq k \Big\}.$$

Sabemos que a es de Cauchy si, y sólo si,
los diámetros de sus colas tienden a cero:

$$\lim_{k \to \infty} \gamma_a(k) = 0.$$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $x \in X$.

Entonces $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $x \in X$.
Entonces $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Idea de demostración. Pongamos $f := (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $s := (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $x \in X$.
Entonces $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Idea de demostración. Pongamos $f := (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $s := (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

$$|f_n(x) - f_m(x)| =$$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $x \in X$.
Entonces $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Idea de demostración. Pongamos $f := (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $s := (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n - f_m)(x)| \le \|f_n - f_m\|_{\sup}.$$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $x \in X$.
Entonces $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Idea de demostración. Pongamos $f := (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $s := (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n - f_m)(x)| \le \|f_n - f_m\|_{\sup}.$$

Entonces para cada k en $\mathbb{N}$

$$\gamma_s(k)$$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $x \in X$.
Entonces $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Idea de demostración. Pongamos $f := (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $s := (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n - f_m)(x)| \le \|f_n - f_m\|_{\sup}.$$

Entonces para cada k en $\mathbb{N}$

$$\gamma_s(k) \le \gamma_f(k).$$

$\square$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y una cota para la función límite

Lema

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $g\colon X \to \mathbb{C}$ tales que

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x).$$

Entonces

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad N(g - f_n) \leq \gamma_f(k).$$

Demostración

Sea $k \in \mathbb{N}$. Por la definición de $\gamma_f(k)$,

Demostración

Sea $k \in \mathbb{N}$. Por la definición de $\gamma_f(k)$,

$$\forall m, n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - f_m(x)| < \gamma_f(k).$$

Demostración

Sea $k \in \mathbb{N}$. Por la definición de $\gamma_f(k)$,

$$\forall m, n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - f_m(x)| < \gamma_f(k).$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$:

Demostración

Sea $k \in \mathbb{N}$. Por la definición de $\gamma_f(k)$,

$$\forall m, n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - f_m(x)| < \gamma_f(k).$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$:

$$\forall n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - g(x)| \leq \gamma_f(k).$$

Demostración

Sea $k \in \mathbb{N}$. Por la definición de $\gamma_f(k)$,

$$\forall m, n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - f_m(x)| < \gamma_f(k).$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$:

$$\forall n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - g(x)| \leq \gamma_f(k).$$

Luego

Demostración

Sea $k \in \mathbb{N}$. Por la definición de $\gamma_f(k)$,

$$\forall m, n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - f_m(x)| < \gamma_f(k).$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$:

$$\forall n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - g(x)| \leq \gamma_f(k).$$

Luego

$$\forall n \geq k \qquad N(f_n - g) \leq \gamma_f(k).$$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$, la convergencia puntual y uniforme

Lema

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $g\colon X \to \mathbb{C}$ tales que

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x).$$

Entonces $\quad g \in B(X) \quad$ y $\quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_{\sup} = 0.$

Demostración

Ya sabemos que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad N(f_n - g) \leq \gamma_f(k).$$

Demostración

Ya sabemos que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad N(f_n - g) \leq \gamma_f(k).$$

Además, como f es de Cauchy,

Demostración

Ya sabemos que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad N(f_n - g) \leq \gamma_f(k).$$

Además, como f es de Cauchy, $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_f(k) = 0.$

Demostración

Ya sabemos que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad N(f_n - g) \leq \gamma_f(k).$$

Además, como f es de Cauchy, $\lim_{k\to\infty} \gamma_f(k) = 0.$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} N(f_n - g) = 0.$$

Demostración

Ya sabemos que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad N(f_n - g) \leq \gamma_f(k).$$

Además, como f es de Cauchy, $\quad \lim_{k\to\infty} \gamma_f(k) = 0.$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} N(f_n - g) = 0.$$

Además, encontramos k tal que $\gamma_f(k) < 1$. Luego

Demostración

Ya sabemos que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad N(f_n - g) \leq \gamma_f(k).$$

Además, como f es de Cauchy, $\quad \lim_{k\to\infty} \gamma_f(k) = 0.$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} N(f_n - g) = 0.$$

Además, encontramos k tal que $\gamma_f(k) < 1$. Luego

$$N(g) \leq N(g - f_n) + N(f_n) < +\infty.$$

Completez de $B(X)$

Proposición

El espacio $B(X)$ es completo.

Completez de $B(X)$

Proposición

El espacio $B(X)$ es completo.

Demostración: se sigue de los lemas.

Ejercicios sobre $B(X)$

Ejercicio. Demostrar que la norma $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ es submultiplicativa:

$$\|fg\|_{\text{sup}} \leq \|f\|_{\text{sup}} \, \|g\|_{\text{sup}}.$$

Ejercicios sobre $B(X)$

Ejercicio. Demostrar que la norma $\|\cdot\|_{\sup}$ es submultiplicativa:

$$\|fg\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup} \|g\|_{\sup}.$$

Ejercicio. Construir ejemplos con

$$\|fg\|_{\sup} < \|f\|_{\sup} \|g\|_{\sup}.$$

Ejercicios sobre $B(X)$

Ejercicio. Demostrar que la norma $\|\cdot\|_{\sup}$ es submultiplicativa:

$$\|fg\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup} \|g\|_{\sup}.$$

Ejercicio. Construir ejemplos con

$$\|fg\|_{\sup} < \|f\|_{\sup} \|g\|_{\sup}.$$

Ejercicio. Mostrar que $B(X)$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad. (Buscar las definiciones correspondientes en libros.)

Funciones acotadas después de multiplicar por un peso

Para cada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pongamos

$$N(f) \coloneqq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-x^2} f(x) \right|.$$

$$V \coloneqq \{ f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \colon \quad N(f) < +\infty \}.$$

V se considera con N restringida.

Funciones acotadas después de multiplicar por un peso

Para cada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pongamos

$$N(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-x^2} f(x) \right|.$$

$$V := \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} : \quad N(f) < +\infty\}.$$

V se considera con N restringida.

Ejercicio. Demostrar que N es una norma extendida.

Demostrar que V es un espacio de Banach.

Funciones acotadas después de multiplicar por un peso

Para cada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pongamos

$$N(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-x^2} f(x) \right| .$$

$$V := \{ f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \colon \quad N(f) < +\infty \}.$$

V se considera con N restringida.

Ejercicio. Demostrar que N es una norma extendida.
Demostrar que V es un espacio de Banach.

Ejercicio. Demostrar que las funciones polinomiales pertenecen al espacio V.

$C_b(X)$: funciones continuas acotadas

Sea X un espacio topológico. $C_b(X) := B(X) \cap C(X)$.

$C_b(X)$: funciones continuas acotadas

Sea X un espacio topológico. $C_b(X) := B(X) \cap C(X)$.

Lema

Sean $f, g \in B(X)$, $x, y \in X$. Entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)| + 2\|f - g\|_{\sup}.$$

$C_b(X)$: funciones continuas acotadas

Sea X un espacio topológico. $C_b(X) := B(X) \cap C(X)$.

Lema

Sean $f, g \in B(X)$, $x, y \in X$. Entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)| + 2\|f - g\|_{\sup}.$$

Demostración.

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(y)| + |g(y) - f(y)|.$$

Acotamos los sumandos $|f(x) - g(x)|$, $|g(y) - f(y)|$ por $\|f - g\|_{\sup}$. □

Proposición

$C_b(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$.

Proposición

$C_b(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$.

Demostración. Sean $f \in \operatorname{clos}(C_b(X))$, $a \in X$. Mostremos que f es continua en a.

Proposición

$C_b(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$.

Demostración. Sean $f \in \operatorname{clos}(C_b(X))$, $a \in X$. Mostremos que f es continua en a.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos g en $C_b(X)$ tal que $\|g - f\|_{\sup} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Proposición

$C_b(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$.

Demostración. Sean $f \in \operatorname{clos}(C_b(X))$, $a \in X$. Mostremos que f es continua en a.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos g en $C_b(X)$ tal que $\|g - f\|_{\sup} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Como g es continua, encontramos $V \in \tau_X(a)$ tal que

$$\forall x \in V \qquad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Proposición

$C_b(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$.

Demostración. Sean $f \in \operatorname{clos}(C_b(X))$, $a \in X$. Mostremos que f es continua en a.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos g en $C_b(X)$ tal que $\|g - f\|_{\sup} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Como g es continua, encontramos $V \in \tau_X(a)$ tal que

$$\forall x \in V \qquad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces para cada x en V tenemos

$$|f(x) - f(a)| \leq |g(x) - g(a)| + 2\|f - g\|_{\sup} < \varepsilon. \qquad \square$$

$C(K)$: funciones continuas sobre un compacto

Sea K un espacio topológico compacto y de Hausdorff.

$C(K)$: funciones continuas sobre un compacto

Sea K un espacio topológico compacto y de Hausdorff.

Ejercicio. Demostrar que si $f \in C(K, \mathbb{C})$, entonces $f[K]$ es un compacto en $\mathbb{C}$.

$C(K)$: funciones continuas sobre un compacto

Sea K un espacio topológico compacto y de Hausdorff.

Ejercicio. Demostrar que si $f \in C(K, \mathbb{C})$, entonces $f[K]$ es un compacto en $\mathbb{C}$.

Luego $C_b(K) = C(K)$.

$C_0(X)$: funciones continuas que tienden a 0 en infinito

Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto.

$C_0(X)$: funciones continuas que tienden a 0 en infinito

Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto.

$$C_0(X) := \left\{ f \in \mathbb{C}^X : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \subseteq X \text{ compacto} \quad \forall x \in X \setminus K \quad |f(x)| < \varepsilon \right\}.$$

$C_0(X)$: funciones continuas que tienden a 0 en infinito

Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto.

$$C_0(X) := \left\{ f \in \mathbb{C}^X : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \subseteq X \text{ compacto} \quad \forall x \in X \setminus K \quad |f(x)| < \varepsilon \right\}.$$

Ejercicio. Demostrar que $C_0(X) \subseteq B(X)$.

$C_0(X)$: funciones continuas que tienden a 0 en infinito

Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto.

$$C_0(X) := \left\{ f \in \mathbb{C}^X : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \subseteq X \text{ compacto} \quad \forall x \in X \setminus K \quad |f(x)| < \varepsilon \right\}.$$

Ejercicio. Demostrar que $C_0(X) \subseteq B(X)$.

Ejercicio. Demostrar que $C_0(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$.

$C_{bu}(X)$: funciones acotadas uniformemente continuas

Sea X un espacio métrico.

$$C_{bu}(X) := \Big\{ f \in B(X) \colon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in X$$

$$d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Big\}.$$

$C_{bu}(X)$: funciones acotadas uniformemente continuas

Sea X un espacio métrico.

$$C_{bu}(X) := \Big\{ f \in B(X)\colon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in X$$

$$d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Big\}.$$

Ejercicio. Demostrar que $C_{bu}(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$.

Ejemplo de espacio normado incompleto

$V :=$ el espacio vectorial de las funciones polinomiales $[0,1] \to \mathbb{C}$.

Consideramos V como un subespacio vectorial de $C([0,1])$.

Dotamos V de la norma-supremo.

Ejercicio. Consideramos

$$f(x) := \frac{2}{2-x} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}, \qquad g_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{2^k}.$$

Demostrar que

$$\lim_{m\to\infty} \|g_m - f\|_{C([0,1])} = 0.$$

Demostrar que V no es completo.

Sea X un espacio métrico. Sea $\alpha \in (0, 1]$.

Sea X un espacio métrico. Sea $\alpha \in (0, 1]$.

En este tema denotamos el espacio de Hölder por $H^\alpha(X)$. Esta notación no es estándar.

Sea X un espacio métrico. Sea $\alpha \in (0,1]$.

En este tema denotamos el espacio de Hölder por $H^\alpha(X)$. Esta notación no es estándar.

Se define la α-seminorma de Hölder:

$$h_\alpha(f) := \sup_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha}.$$

$$H^\alpha(X) := \{f \in B(X) : \quad h_\alpha(f) < +\infty\}.$$

Sea X un espacio métrico. Sea $\alpha \in (0,1]$.

En este tema denotamos el espacio de Hölder por $H^\alpha(X)$. Esta notación no es estándar.

Se define la α-seminorma de Hölder:

$$h_\alpha(f) := \sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^\alpha}.$$

$$H^\alpha(X) := \{f \in B(X) : \quad h_\alpha(f) < +\infty\}.$$

Norma en $H^\alpha(X)$:

$$\|f\| := \|f\|_{\sup} + h_\alpha(f).$$

Ejercicios sobre espacios de Hölder

Ejercicio. Verificar que esta función es una norma:

$$\|f\| := \|f\|_{\text{sup}} + h_\alpha(f).$$

Ejercicios sobre espacios de Hölder

Ejercicio. Verificar que esta función es una norma:

$$\|f\| := \|f\|_{\sup} + h_\alpha(f).$$

Ejercicio. Demostrar que $H^\alpha(X)$ con esta norma es completo.

Ejercicios sobre espacios de Hölder

Ejercicio. Verificar que esta función es una norma:

$$\|f\| := \|f\|_{\sup} + h_\alpha(f).$$

Ejercicio. Demostrar que $H^\alpha(X)$ con esta norma es completo.

Ejercicio. Demostrar que si $X = [a, b]$, $\alpha > 1$ y $h_\alpha(f) < +\infty$, entonces f es constante.

Ejercicios sobre espacios de Hölder

Ejercicio. Verificar que esta función es una norma:

$$\|f\| := \|f\|_{\sup} + h_\alpha(f).$$

Ejercicio. Demostrar que $H^\alpha(X)$ con esta norma es completo.

Ejercicio. Demostrar que si $X = [a, b]$, $\alpha > 1$ y $h_\alpha(f) < +\infty$, entonces f es constante.

Por eso los espacios de Hölder se definen solo para $0 < \alpha \leq 1$.
Para $\alpha = 1$, es el espacio de Lipschitz: $H^1(X) = \mathrm{Lip}(X)$.

Ejercicios sobre espacios de Hölder

Ejercicio. Sean $X = [a, b]$, $0 < \alpha \leq 1$. Consideramos

$$f(x) := (x - a)^{\alpha}.$$

Mostrar que $f \in H^{\alpha}([a, b])$.

Ejercicios sobre espacios de Hölder

Ejercicio. Sean $X = [a, b]$, $0 < \alpha \leq 1$. Consideramos

$$f(x) := (x - a)^{\alpha}.$$

Mostrar que $f \in H^{\alpha}([a, b])$.

Ejercicio. Sean $X = [a, b]$, $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Mostrar que

$$H^{\beta}([a, b]) \subsetneq H^{\alpha}([a, b]).$$

Ejercicios sobre espacios de Hölder

Ejercicio. Sean $X = [a, b]$, $0 < \alpha \leq 1$. Consideramos

$$f(x) := (x - a)^\alpha.$$

Mostrar que $f \in H^\alpha([a, b])$.

Ejercicio. Sean $X = [a, b]$, $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Mostrar que

$$H^\beta([a, b]) \subsetneq H^\alpha([a, b]).$$

Ejercicio. Sean $X = [a, b]$, $0 < \alpha \leq 1$. Mostrar que

$$H^\alpha([a, b]) \subsetneq C_{bu}([a, b]).$$

Espacios de funciones de suavidad finita

Aquí suponemos $X = [a, b]$. Más general, podríamos suponer $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Espacios de funciones de suavidad finita

Aquí suponemos $X = [a, b]$. Más general, podríamos suponer $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

$C^m([a, b])$ consiste de las funciones continuas en $[a, b]$
y m veces continuamente derivables en $[a, b]$.

Espacios de funciones de suavidad finita

Aquí suponemos $X = [a, b]$. Más general, podríamos suponer $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

$C^m([a, b])$ consiste de las funciones continuas en $[a, b]$
y m veces continuamente derivables en $[a, b]$.

$$\|f\|_{C^m} := \sum_{k=0}^{m} \frac{\|f^{(k)}\|_{\sup}}{k!}.$$

Ejercicio. Demostrar que $C^m([a, b])$ es un espacio de Banach.

Ejercicio. Demostrar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C^1([a,b])$,

$$f_n \xrightarrow[\longrightarrow]{[a,b]} g, \qquad f_n' \xrightarrow[\longrightarrow]{[a,b]} h,$$

entonces $g' = h$.

Ejercicio. Demostrar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C^1([a,b])$,

$$f_n \xrightarrow{[a,b]} g, \qquad f_n' \xrightarrow{[a,b]} h,$$

entonces $g' = h$.

Ejercicio. Demostrar que $C^m([a,b])$ es un espacio de Banach.

Ejercicio. Demostrar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C^1([a,b])$,

$$f_n \xrightarrow[]{[a,b]} g, \qquad f_n' \xrightarrow[]{[a,b]} h,$$

entonces $g' = h$.

Ejercicio. Demostrar que $C^m([a,b])$ es un espacio de Banach.

Ejercicio. Demostrar que la norma

$$\|f\|_{C^m} := \sum_{k=0}^{m} \frac{\|f^{(k)}\|_{\sup}}{k!}$$

es submultiplicativa: $\quad \|fg\|_{C^m} \leq \|f\|_{C^m}\|g\|_{C^m}.$

Propiedad submultiplicativa para $m = 2$

Sean $f, g \in C^2([a, b])$. Luego

$$
\begin{aligned}
\|fg\|_{C^m} &\leq \|fg\|_{\text{sup}} + \|f'g + fg'\|_{\text{sup}} + \frac{1}{2}\|f''g + 2f'g' + fg''\|_{\text{sup}} \\
&\leq \|f\|_{\text{sup}}\|g\|_{\text{sup}} + \|f'\|_{\text{sup}}\|g\|_{\text{sup}} + \|f\|_{\text{sup}}\|g'\|_{\text{sup}} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\|f''\|_{\text{sup}}\|g\|_{\text{sup}} + \|f'\|_{\text{sup}}\|g'\|_{\text{sup}} + \frac{1}{2}\|f\|_{\text{sup}}\|g''\|_{\text{sup}} \\
&\leq \left(\|f\|_{\text{sup}} + \|f'\|_{\text{sup}} + \frac{1}{2}\|f''\|_{\text{sup}}\right)\left(\|g\|_{\text{sup}} + \|g'\|_{\text{sup}} + \frac{1}{2}\|g''\|_{\text{sup}}\right) \\
&= \|f\|_{C^2}\|g\|_{C^2}.
\end{aligned}
$$

Funciones que no son infinitamente suaves

Ejercicio. Definimos $f\colon [-1,1] \to \mathbb{C}$,

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ 0, & x \in [-1,0). \end{cases}$$

Verificar que $f \in C([-1,1]) \setminus C^1([-1,1])$.

Funciones que no son infinitamente suaves

Ejercicio. Definimos $f\colon [-1,1] \to \mathbb{C}$,

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ 0, & x \in [-1,0). \end{cases}$$

Verificar que $f \in C([-1,1]) \setminus C^1([-1,1])$.

Ejercicio. Sea $m \in \mathbb{N}$. Construir una función f tal que

$$f \in C^m([-1,1]) \setminus C^{m+1}([-1,1]).$$

Variación total de una función

Denotemos por $\mathcal{P}(a, b)$ el conjunto de las particiones de $[a, b]$:

$$\mathcal{P}(a, b) := \{\tau = (\tau_0, \dots, \tau_m) \colon \quad m \in \mathbb{N}, \quad a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m = b\}.$$

Variación total de una función

Denotemos por $\mathcal{P}(a,b)$ el conjunto de las particiones de $[a,b]$:

$$\mathcal{P}(a,b) := \{\tau = (\tau_0,\ldots,\tau_m)\colon \quad m \in \mathbb{N}, \quad a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m = b\}.$$

Para cada $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ y cada τ en $\mathcal{P}(a,b)$,

$$S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) := \sum_{k=1}^{n} |f(\tau_k) - f(\tau_{k-1})|.$$

Variación total de una función

Denotemos por $\mathcal{P}(a, b)$ el conjunto de las particiones de $[a, b]$:

$$\mathcal{P}(a, b) := \{\tau = (\tau_0, \ldots, \tau_m) \colon \quad m \in \mathbb{N}, \quad a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m = b\}.$$

Para cada $f \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ y cada τ en $\mathcal{P}(a, b)$,

$$S_{\mathrm{abs}}(f, \tau) := \sum_{k=1}^{n} |f(\tau_k) - f(\tau_{k-1})|.$$

Para cada $f \colon [a, b] \to \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Var}_a^b(f) := \sup_{\tau \in \mathcal{P}(a,b)} S_{\mathrm{abs}}(f, \tau).$$

Ejercicio. Mostrar que para cada x, y en $[a, b]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{Var}_a^b(f).$$

Ejercicio. Mostrar que para cada x, y en $[a, b]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{Var}_a^b(f).$$

Ejercicio. Mostrar que

$$\sup_{x \in X} |f(x)| \leq |f(a)| + \mathrm{Var}_a^b(f).$$

Funciones de variación acotada

$$\mathrm{BV}([a,b]) := \{f \in \mathbb{C}^{[a,b]} : \quad \mathrm{Var}_a^b(f) < +\infty\}.$$

Funciones de variación acotada

$$\mathrm{BV}([a,b]) := \{f \in \mathbb{C}^{[a,b]} : \quad \mathrm{Var}_a^b(f) < +\infty\}.$$

$$\|f\|_{\mathrm{BV}([a,b])} := \|f\|_{\sup} + \mathrm{Var}_a^b(f).$$

Funciones de variación acotada

$$\mathrm{BV}([a,b]) := \{f \in \mathbb{C}^{[a,b]}: \quad \mathrm{Var}_a^b(f) < +\infty\}.$$

$$\|f\|_{\mathrm{BV}([a,b])} := \|f\|_{\sup} + \mathrm{Var}_a^b(f).$$

Ejercicio. Mostrar que $\mathrm{BV}([a,b]) \subseteq B([a,b])$.

Funciones de variación acotada

$$\mathrm{BV}([a,b]) := \{f \in \mathbb{C}^{[a,b]} : \quad \mathrm{Var}_a^b(f) < +\infty\}.$$

$$\|f\|_{\mathrm{BV}([a,b])} := \|f\|_{\sup} + \mathrm{Var}_a^b(f).$$

Ejercicio. Mostrar que $\mathrm{BV}([a,b]) \subseteq B([a,b])$.

Ejercicio. Mostrar que $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$ es una norma.

Funciones de variación acotada

Ejercicio. Mostrar que si una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en BV($[a, b]$), entonces converge en cada punto.

Funciones de variación acotada

Ejercicio. Mostrar que si una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en BV([a, b]), entonces converge en cada punto.

Ejercicio. Mostrar que BV([a, b]) es un espacio de Banach.

Funciones de variación acotada

Ejercicio. Mostrar que si una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathrm{BV}([a, b])$, entonces converge en cada punto.

Ejercicio. Mostrar que $\mathrm{BV}([a, b])$ es un espacio de Banach.

Ejercicio. Recordar la definición de $\mathrm{AC}([a, b])$ (funciones absolutamente continuas). Demostrar que $\mathrm{AC}([a, b])$ es un subespacio cerrado de $\mathrm{BV}([a, b])$.