Espacios de funciones Hölder o Lipschitz continuas

(un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

22 de septiembre de 2022

1 Introducción

Plan

1 Introducción

Objetivo:

- introducir el espacio normado $\mathrm{Höl}^{\alpha}(X)$,
- demostrar su completez.

Objetivo:

- introducir el espacio normado $\text{Höl}^{\alpha}(X)$,
- demostrar su completez.

Prerrequisitos:

- el espacio normado $B(X)$ y su completez,
- continuidad de funciones,
- funciones Lipschitz continuas,
- funciones Hölder continuas.

La seminorma extendida de Hölder

En este tema suponemos que X es un espacio métrico y que $\alpha \in (0, 1]$.

La seminorma extendida de Hölder

En este tema suponemos que X es un espacio métrico y que $\alpha \in (0, 1]$.

Definimos $N_\alpha \colon \mathbb{C}^X \to [0, +\infty]$,

$$N_\alpha(f) := \sup_{\substack{a,b \in X \\ a \neq b}} \frac{|f(a) - f(b)|}{d(a, b)^\alpha}.$$

La seminorma extendida de Hölder

En este tema suponemos que X es un espacio métrico y que $\alpha \in (0,1]$.

Definimos $N_\alpha \colon \mathbb{C}^X \to [0,+\infty]$,

$$N_\alpha(f) := \sup_{\substack{a,b\in X\\ a\neq b}} \frac{|f(a)-f(b)|}{d(a,b)^\alpha}.$$

Una función f es α-Hölder continua, si $N_\alpha(f) < +\infty$.

La seminorma extendida de Hölder

En este tema suponemos que X es un espacio métrico y que $\alpha \in (0,1]$.

Definimos $N_\alpha\colon \mathbb{C}^X \to [0,+\infty]$,

$$N_\alpha(f) := \sup_{\substack{a,b\in X\\ a\neq b}} \frac{|f(a)-f(b)|}{d(a,b)^\alpha}.$$

Una función f es α-Hölder continua, si $N_\alpha(f) < +\infty$.

Proposición

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $N_\alpha(f) < +\infty$;

(b) existe $C \geq 0$ tal que para cada a, b en X se cumple $|f(a)-f(b)| \leq C\, d(a,b)^\alpha$.

La seminorma extendida de Hölder

Proposición

La función N_α es subaditiva y absolutamente homogénea.

La seminorma extendida de Hölder

Proposición

La función N_α es subaditiva y absolutamente homogénea.

Ejercicio. Demostrar que N_α es subaditiva.

La seminorma extendida de Hölder

Proposición

La función N_α es subaditiva y absolutamente homogénea.

Ejercicio. Demostrar que N_α es subaditiva.

Ejercicio. Mostrar que $N_\alpha(f) = 0$ si, y sólo si, f es una función constante.

La seminorma extendida de Hölder

Proposición

La función N_α es subaditiva y absolutamente homogénea.

Ejercicio. Demostrar que N_α es subaditiva.

Ejercicio. Mostrar que $N_\alpha(f) = 0$ si, y sólo si, f es una función constante.

Ejercicio. Verificar que $N_\alpha(0\,f) = 0 = |0|\,N_\alpha(f)$.

Demostración que N_α es absolutamente homogénea (caso $\lambda \neq 0$)

1. Sean $f \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Para cada a, b en X,

$$\frac{|(\lambda f)(a) - (\lambda f)(b)|}{d(a,b)^\alpha} = |\lambda| \, \frac{|f(a) - f(b)|}{d(a,b)^\alpha} \leq |\lambda| \, N_\alpha(f).$$

Demostración que N_α es absolutamente homogénea (caso $\lambda \neq 0$)

1. Sean $f \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Para cada a, b en X,

$$\frac{|(\lambda f)(a) - (\lambda f)(b)|}{d(a,b)^\alpha} = |\lambda| \frac{|f(a) - f(b)|}{d(a,b)^\alpha} \leq |\lambda| N_\alpha(f).$$

Por lo tanto, $N_\alpha(\lambda f) \leq |\lambda| N_\alpha(f)$.

Demostración que N_α es absolutamente homogénea (caso $\lambda \neq 0$)

1. Sean $f \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Para cada a, b en X,

$$\frac{|(\lambda f)(a) - (\lambda f)(b)|}{d(a,b)^\alpha} = |\lambda| \, \frac{|f(a) - f(b)|}{d(a,b)^\alpha} \leq |\lambda| \, N_\alpha(f).$$

Por lo tanto, $N_\alpha(\lambda f) \leq |\lambda| \, N_\alpha(f)$.

2. Si $\lambda \neq 0$, entonces notamos que $f = \frac{1}{\lambda}(\lambda f)$.

Demostración que N_α es absolutamente homogénea (caso $\lambda \neq 0$)

1. Sean $f \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Para cada a, b en X,

$$\frac{|(\lambda f)(a) - (\lambda f)(b)|}{d(a,b)^\alpha} = |\lambda| \, \frac{|f(a) - f(b)|}{d(a,b)^\alpha} \leq |\lambda| \, N_\alpha(f).$$

Por lo tanto, $N_\alpha(\lambda f) \leq |\lambda| \, N_\alpha(f)$.

2. Si $\lambda \neq 0$, entonces notamos que $f = \frac{1}{\lambda}(\lambda f)$.
Aplicamos el resultado del insico 1 al escalar $1/\lambda$ y la función λf:

$$N_\alpha(f) = N_\alpha\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\right) \leq \frac{1}{|\lambda|} \, N_\alpha(\lambda f).$$

Demostración que N_α es absolutamente homogénea (caso $\lambda \neq 0$)

1. Sean $f \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Para cada a, b en X,

$$\frac{|(\lambda f)(a) - (\lambda f)(b)|}{d(a,b)^\alpha} = |\lambda| \, \frac{|f(a) - f(b)|}{d(a,b)^\alpha} \leq |\lambda| \, N_\alpha(f).$$

Por lo tanto, $N_\alpha(\lambda f) \leq |\lambda| \, N_\alpha(f)$.

2. Si $\lambda \neq 0$, entonces notamos que $f = \frac{1}{\lambda}(\lambda f)$.
Aplicamos el resultado del insico 1 al escalar $1/\lambda$ y la función λf:

$$N_\alpha(f) = N_\alpha\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\right) \leq \frac{1}{|\lambda|} \, N_\alpha(\lambda f).$$

De aquí se sigue que $N_\alpha(\lambda f) \geq |\lambda| \, N_\alpha(f)$.

El espacio $\mathrm{Höl}^{\alpha}(X)$

$$\mathrm{Höl}^{\alpha}(X) := \Big\{ f \in B(X) : \quad N_{\alpha}(f) < +\infty \Big\}.$$

El espacio $\mathrm{Höl}^{\alpha}(X)$

$$\mathrm{Höl}^{\alpha}(X) := \Big\{ f \in B(X) : \quad N_{\alpha}(f) < +\infty \Big\}.$$

Definimos $\|\cdot\|_{\mathrm{Höl}^{\alpha}} : \ \mathrm{Höl}^{\alpha}(X) \to [0, +\infty)$,

$$\|f\|_{\mathrm{Höl}^{\alpha}} := \|f\|_{\mathrm{sup}} + N_{\alpha}(f).$$

El espacio $\text{Höl}^\alpha(X)$

$$\text{Höl}^\alpha(X) := \left\{ f \in B(X) : \quad N_\alpha(f) < +\infty \right\}.$$

Definimos $\|\cdot\|_{\text{Höl}^\alpha} : \text{Höl}^\alpha(X) \to [0, +\infty)$,

$$\|f\|_{\text{Höl}^\alpha} := \|f\|_{\text{sup}} + N_\alpha(f).$$

Proposición

$\text{Höl}^\alpha(X)$ con la función $\|\cdot\|_{\text{Höl}^\alpha}$ es un espacio normado.

El espacio $\mathrm{Höl}^\alpha(X)$

$$\mathrm{Höl}^\alpha(X) := \left\{ f \in B(X) : \quad N_\alpha(f) < +\infty \right\}.$$

Definimos $\|\cdot\|_{\mathrm{Höl}^\alpha} : \ \mathrm{Höl}^\alpha(X) \to [0, +\infty)$,

$$\|f\|_{\mathrm{Höl}^\alpha} := \|f\|_{\mathrm{sup}} + N_\alpha(f).$$

Proposición

$\mathrm{Höl}^\alpha(X)$ con la función $\|\cdot\|_{\mathrm{Höl}^\alpha}$ es un espacio normado.

Demostración: se sigue de las propiedades de $\|\cdot\|_{\mathrm{sup}}$ y N_α.

La completez del espacio de Hölder

Proposición

$\text{Höl}^{\alpha}(X)$ es completo.

La completez del espacio de Hölder

Proposición

$\text{Höl}^\alpha(X)$ es completo.

Plan de demostración.

La completez del espacio de Hölder

Proposición

$\mathrm{Höl}^{\alpha}(X)$ es completo.

Plan de demostración.

- Dada una sucesión regular de Cauchy $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathrm{Höl}^{\alpha}(X)$, mostrar que f es regular de Cauchy en $B(X)$.

La completez del espacio de Hölder

Proposición

$\mathrm{H\ddot{o}l}^{\alpha}(X)$ es completo.

Plan de demostración.

- Dada una sucesión regular de Cauchy $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathrm{H\ddot{o}l}^{\alpha}(X)$, mostrar que f es regular de Cauchy en $B(X)$.
- Usamos el hecho que $B(X)$ es completo. Sea g la función límite. Sabemos que $\|f_n - g\|_{\sup} \to 0$, cuando $n \to \infty$.

La completez del espacio de Hölder

Proposición

$\mathrm{Höl}^{\alpha}(X)$ es completo.

Plan de demostración.

- Dada una sucesión regular de Cauchy $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathrm{Höl}^{\alpha}(X)$, mostrar que f es regular de Cauchy en $B(X)$.
- Usamos el hecho que $B(X)$ es completo. Sea g la función límite. Sabemos que $\|f_n - g\|_{\sup} \to 0$, cuando $n \to \infty$.
- Demostrar que $N_{\alpha}(f_n - g) \leq 2^{-n-1}$.

La completez del espacio de Hölder

Proposición

$\text{Höl}^{\alpha}(X)$ es completo.

Plan de demostración.

- Dada una sucesión regular de Cauchy $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\text{Höl}^{\alpha}(X)$, mostrar que f es regular de Cauchy en $B(X)$.
- Usamos el hecho que $B(X)$ es completo. Sea g la función límite. Sabemos que $\|f_n - g\|_{\sup} \to 0$, cuando $n \to \infty$.
- Demostrar que $N_{\alpha}(f_n - g) \leq 2^{-n-1}$.
- Demostrar que $g \in \text{Höl}^{\alpha}(X)$. Concluir que $f_n \to g$ en $\text{Höl}^{\alpha}(X)$.

El espacio de funciones Lipschitz continuas

En el caso $\alpha = 1$, hablamos de funciones Lipschitz continuas.

$$\mathrm{Lip}(X) := \mathrm{H\ddot{o}l}^1(X).$$