# El espacio de transformaciones lineales acotadas (un tema del curso "Análisis funcional")

Egor Maximenko
http://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

30 de octubre de 2020

1. Introducción
2. Espacio normado $\mathcal{B}(V, W)$
3. Completez de $\mathcal{B}(V, W)$
4. La norma de una composición

# Plan


1. Introducción
2. Espacio normado $\mathcal{B}(V, W)$
3. Completez de $\mathcal{B}(V, W)$
4. La norma de una composición

# Objetivos

- Dados dos espacios normados complejos $V$ y $W$, introducir el espacio normado $\mathcal{B}(V, W)$ de las transformaciones lineales acotadas $V \to W$.
- Demostrar que si $W$ es completo, entonces $\mathcal{B}(V, W)$ es completo.
- Demostrar la siguiente desigualdad para la norma de la composición:

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

# Prerrequisitos

- Conjuntos acotados en espacios métricos y normados.
- Criterio de continuidad de una transformación lineal.
- Varias fórmulas equivalentes para la norma de una transformación lineal.
- Operaciones con transformaciones lineales en espacios vectoriales.

# Criterio de continuidad de una transf. lineal (repaso)

**Proposición**

Sean $V$ y $W$ espacios normados y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $T$ es Lipschitz continua.

(b) $T$ es uniformemente continua.

(c) $T$ es continua.

(d) $T$ es continua en el punto $0_V$.

(e) $\sup\{\|Ax\|_W\colon \quad x \in V, \quad \|x\|_V \le 1\} < +\infty$.

(f) $T(B_V(0,1))$ es un conjunto acotado en $W$.

(g) $\exists C \ge 0 \qquad \forall x \in V \qquad \|Ax\|_W \le C\,\|x\|_V$.

# La norma de una transformación lineal (repaso)

## Proposición

Sean $V$ y $W$ espacios normados y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal.

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V\le 1}} \|Tx\|_W, \quad N_2(T) := \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V=1}} \|Tx\|_W, \quad N_3(T) := \sup_{\substack{x\in V\\ x\ne 0_V}} \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V},$$

$$N_4(T) := \inf\{C\in[0,+\infty]\colon\quad \forall x\in V\quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V\}.$$

Entonces $N_1(T) = N_2(T) = N_3(T) = N_4(T)$.

Más aún, el ínfimo en la definición de $N_4(T)$ se alcanza, esto es,

$$\forall x\in V\quad \|Tx\|_W \le N_4(T)\|x\|_V.$$

Sean $V, W$ espacios normados.

Sean $V, W$ espacios normados.

Una transformación lineal $T\colon V \to W$ se llama acotada, si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V.$$

Sean $V, W$ espacios normados.

Una transformación lineal $T\colon V \to W$ se llama acotada, si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V.$$

La norma de una transformación lineal acotada $T$ se define como

$$\|T\| := \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\|_W.$$

Otra notación: $\|T\|_{V\to W}$, $\|T\|_{\mathcal{B}(V,W)}$.

Sean $V, W$ espacios normados.

Una transformación lineal $T\colon V \to W$ se llama acotada, si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V.$$

La norma de una transformación lineal acotada $T$ se define como

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\|_W.$$

Otra notación: $\|T\|_{V \to W}$, $\|T\|_{\mathcal{B}(V,W)}$.

Si $T$ es acotada, entonces $\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq \|T\|\,\|x\|_V.$

**Ejercicio.** Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal y sea $a \in V$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- $T$ es continua en $a$,
- $T$ es continua.

**Ejercicio.** Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal y sea $a \in V$.
Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- $T$ es continua en $a$,
- $T$ es continua.

**Ejercicio.** Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal.
Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- $T$ es continua,
- para cada conjunto $X$ acotado en $V$, el conjunto $T[X]$ es acotado en $W$.

# Plan


1. Introducción
2. Espacio normado $\mathcal{B}(V, W)$
3. Completez de $\mathcal{B}(V, W)$
4. La norma de una composición

# Operaciones lineales con las transformaciones lineales (repaso)

Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales complejos,
$A, B\colon V \to W$ transformaciones lineales, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$(A + B)x := Ax + Bx, \qquad (\lambda A)x := \lambda(Ax).$$

Es fácil verificar que $A + B$ y $\lambda A$ son transformaciones lineales.

# Operaciones lineales con transformaciones lineales acotadas

**Proposición**

Sean $V, W$ espacios normados, $A, B \in \mathcal{B}(V, W)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $A + B \in \mathcal{B}(V, W)$, $\lambda A \in \mathcal{B}(V, W)$,

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|, \qquad \|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|.$$

## Demostración de la desigualdad $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Para cada $x$ en $V$ con $\|x\|_V \leq 1$,

$$\|(A + B)x\|_W = \|Ax + Bx\|_W \leq \|Ax\|_W + \|Bx\|_W \leq \|A\| + \|B\|.$$

# Demostración de la desigualdad $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

Para cada $x$ en $V$ con $\|x\|_V \le 1$,

$$\|(A+B)x\|_W = \|Ax + Bx\|_W \le \|Ax\|_W + \|Bx\|_W \le \|A\| + \|B\|.$$

Hemos mostrado que $\|A\| + \|B\|$ es una cota superior del conjunto

$$\{\|(A+B)x\|_W : \quad x \in V, \quad \|x\|_V \le 1\}.$$

# Demostración de la desigualdad $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

Para cada $x$ en $V$ con $\|x\|_V \le 1$,

$$\|(A+B)x\|_W = \|Ax+Bx\|_W \le \|Ax\|_W + \|Bx\|_W \le \|A\| + \|B\|.$$

Hemos mostrado que $\|A\| + \|B\|$ es una cota superior del conjunto

$$\{\|(A+B)x\|_W\colon \quad x \in V, \quad \|x\|_V \le 1\}.$$

Esto implica que $A+B \in \mathcal{B}(V,W)$.
Más aún, como $N_1(A+B)$ es el supremo de este conjunto,

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|.$$

# Demostración de la igualdad $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$

Si $\lambda = 0$, ambos lados son 0. Supongamos que $\lambda \neq 0$.

# Demostración de la igualdad $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$

Si $\lambda = 0$, ambos lados son 0. Supongamos que $\lambda \neq 0$.

Para cada $x$ en $V$,

$$\|(\lambda A)x\|_W = \|\lambda(Ax)\|_W = |\lambda|\,\|Ax\|_W \leq |\lambda|\,\|A\|\,\|x\|.$$

# Demostración de la igualdad $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$

Si $\lambda = 0$, ambos lados son 0. Supongamos que $\lambda \neq 0$.

Para cada $x$ en $V$,

$$\|(\lambda A)x\|_W = \|\lambda(Ax)\|_W = |\lambda|\,\|Ax\|_W \leq |\lambda|\,\|A\|\,\|x\|.$$

Esto implica que $\lambda A \in \mathcal{B}(V, W)$ y $\|\lambda A\| = N_4(\lambda A) \leq |\lambda|\,\|A\|$.

# Demostración de la igualdad $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$

Si $\lambda = 0$, ambos lados son 0. Supongamos que $\lambda \neq 0$.

Para cada $x$ en $V$,

$$\|(\lambda A)x\|_W = \|\lambda(Ax)\|_W = |\lambda|\,\|Ax\|_W \le |\lambda|\,\|A\|\,\|x\|.$$

Esto implica que $\lambda A \in \mathcal{B}(V,W)$ y $\|\lambda A\| = N_4(\lambda A) \le |\lambda|\,\|A\|$.

Supongamos que $\lambda \neq 0$. Si $x \in V$, entonces

$$|\lambda|\,\|Ax\|_W = \|\lambda(Ax)\|_W = \|(\lambda A)x\|_W \le \|\lambda A\|\,\|x\|_V,$$

# Demostración de la igualdad $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$

Si $\lambda = 0$, ambos lados son 0. Supongamos que $\lambda \neq 0$.

Para cada $x$ en $V$,

$$\|(\lambda A)x\|_W = \|\lambda(Ax)\|_W = |\lambda|\,\|Ax\|_W \le |\lambda|\,\|A\|\,\|x\|.$$

Esto implica que $\lambda A \in \mathcal{B}(V,W)$ y $\|\lambda A\| = N_4(\lambda A) \le |\lambda|\,\|A\|$.

Supongamos que $\lambda \neq 0$. Si $x \in V$, entonces

$$|\lambda|\,\|Ax\|_W = \|\lambda(Ax)\|_W = \|(\lambda A)x\|_W \le \|\lambda A\|\,\|x\|_V, \qquad \|Ax\|_W \le \frac{\|\lambda A\|}{|\lambda|}\,\|x\|_V,$$

así que $\|A\|_W = N_4(A) \le \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda A\|$.

# Demostración que si $\|A\| = 0$, entonces $A = 0_{V\to W}$

**Proposición**

Sean $V, W$ espacios normados, $A \in \mathcal{B}(V,W)$, $\|A\| = 0$. Entonces $A = 0_{V\to W}$.

# Demostración que si $\|A\| = 0$, entonces $A = 0_{V\to W}$

**Proposición**

Sean $V, W$ espacios normados, $A \in \mathcal{B}(V, W)$, $\|A\| = 0$. Entonces $A = 0_{V\to W}$.

**Demostración.** En efecto, para cada $v$ en $V$ tenemos

$$\|Av\|_W \leq \|A\|\,\|v\|_V = 0,$$

así que $Av = 0_W$. Esto significa que $A = 0_{V\to W}$.

Hemos demostrado el siguiente resultado.

**Proposición**

$\mathcal{B}(V, W)$ es un espacio normado.

Hemos demostrado el siguiente resultado.

**Proposición**

$\mathcal{B}(V, W)$ es un espacio normado.

Observación del profesor Nikolai Vasilevski:
la norma del operador, definida para medir sus propiedades individuales,
de manera sorprendente sirve también en el "contexto social" del espacio $\mathcal{B}(V, W)$.

# Plan


1. Introducción
2. Espacio normado $\mathcal{B}(V, W)$
3. Completez de $\mathcal{B}(V, W)$
4. La norma de una composición

**Proposición**

Sea $V$ un espacio normado y sea $W$ un espacio de Banach.

Entonces $\mathcal{B}(V,W)$ es completo.

# Demostración, inicio

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{B}(V,W)$:

$$\|A_{k+1} - A_k\| \leq 2^{-k-1}.$$

# Demostración, inicio

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{B}(V,W)$:

$$\|A_{k+1} - A_k\| \le 2^{-k-1}.$$

Dado $x$ en $V$, mostremos que la sucesión $(A_k x)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

$$\|A_{k+1}x - A_k x\| = \|(A_{k+1} - A_k)x\| \le \|A_{k+1} - A_k\| \, \|x\| \le 2^{-k-1} \, \|x\|.$$

# Demostración, inicio

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{B}(V,W)$:

$$\|A_{k+1} - A_k\| \le 2^{-k-1}.$$

Dado $x$ en $V$, mostremos que la sucesión $(A_k x)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

$$\|A_{k+1}x - A_k x\| = \|(A_{k+1} - A_k)x\| \le \|A_{k+1} - A_k\|\,\|x\| \le 2^{-k-1}\,\|x\|.$$

$$\text{si } m \ge n, \qquad \|A_m x - A_n x\| \le \sum_{k=n}^{m+1} \|A_{k+1}x - A_k x\| \le 2^{-n}\|x\|.$$

# Demostración, inicio

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{B}(V,W)$:

$$\|A_{k+1} - A_k\| \le 2^{-k-1}.$$

Dado $x$ en $V$, mostremos que la sucesión $(A_k x)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

$$\|A_{k+1}x - A_k x\| = \|(A_{k+1} - A_k)x\| \le \|A_{k+1} - A_k\|\,\|x\| \le 2^{-k-1}\,\|x\|.$$

$$\text{si } m \ge n, \qquad \|A_m x - A_n x\| \le \sum_{k=n}^{m+1} \|A_{k+1}x - A_k x\| \le 2^{-n}\|x\|.$$

La sucesión $(A_k x)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $W$, luego converge. $B(x) \coloneqq \lim_{k\to\infty}(A_k x)$.

# Demostración, continuación

Demostremos que $B$ es lineal. Sean $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

# Demostración, continuación

Demostremos que $B$ es lineal. Sean $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} B(x+y) &= \lim_{k\to\infty} (A_k(x+y)) = \lim_{k\to\infty} (A_k x + A_k y) \\ &= \lim_{k\to\infty} (A_k x) + \lim_{k\to\infty} (A_k y) = B(x) + B(y), \end{aligned}$$

# Demostración, continuación

Demostremos que $B$ es lineal. Sean $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} B(x+y) &= \lim_{k\to\infty} (A_k(x+y)) = \lim_{k\to\infty} (A_k x + A_k y) \\ &= \lim_{k\to\infty} (A_k x) + \lim_{k\to\infty} (A_k y) = B(x) + B(y), \end{aligned}$$

$$B(\lambda x) = \lim_{k\to\infty} (A_k(\lambda x)) = \lim_{k\to\infty} (\lambda A_k x) = \lambda \lim_{k\to\infty} (A_k x) = \lambda\, B(x).$$

Hemos utilizado las siguientes propiedades:

# Demostración, continuación

Demostremos que $B$ es lineal. Sean $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} B(x+y) &= \lim_{k\to\infty}(A_k(x+y)) = \lim_{k\to\infty}(A_k x + A_k y) \\ &= \lim_{k\to\infty}(A_k x) + \lim_{k\to\infty}(A_k y) = B(x) + B(y), \end{aligned}$$

$$B(\lambda x) = \lim_{k\to\infty}(A_k(\lambda x)) = \lim_{k\to\infty}(\lambda A_k x) = \lambda \lim_{k\to\infty}(A_k x) = \lambda\, B(x).$$

Hemos utilizado las siguientes propiedades:

- $A_k v \to B v$ para cada $v$ en $V$,

# Demostración, continuación

Demostremos que $B$ es lineal. Sean $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} B(x+y) &= \lim_{k\to\infty} (A_k(x+y)) = \lim_{k\to\infty} (A_k x + A_k y) \\ &= \lim_{k\to\infty} (A_k x) + \lim_{k\to\infty} (A_k y) = B(x) + B(y), \end{aligned}$$

$$B(\lambda x) = \lim_{k\to\infty} (A_k(\lambda x)) = \lim_{k\to\infty} (\lambda A_k x) = \lambda \lim_{k\to\infty} (A_k x) = \lambda\, B(x).$$

Hemos utilizado las siguientes propiedades:

- $A_k v \to Bv$ para cada $v$ en $V$,
- las transformaciones $A_k$ son lineales,

# Demostración, continuación

Demostremos que $B$ es lineal. Sean $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} B(x+y) &= \lim_{k\to\infty} (A_k(x+y)) = \lim_{k\to\infty} (A_k x + A_k y) \\ &= \lim_{k\to\infty} (A_k x) + \lim_{k\to\infty} (A_k y) = B(x) + B(y), \end{aligned}$$

$$B(\lambda x) = \lim_{k\to\infty} (A_k(\lambda x)) = \lim_{k\to\infty} (\lambda A_k x) = \lambda \lim_{k\to\infty} (A_k x) = \lambda\, B(x).$$

Hemos utilizado las siguientes propiedades:

- $A_k v \to Bv$ para cada $v$ en $V$,
- las transformaciones $A_k$ son lineales,
- las operaciones lineales en $W$ son continuas.

# Demostración, final

Demostremos que $B$ es acotado. Para cada $m$ en $\mathbb{N}$,

$$\|A_m\| = \left\| A_1 + \sum_{k=1}^{m-1} (A_{k+1} - A_k) \right\| \leq \|A_1\| + \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-k-1} \leq \|A_1\| + 1.$$

# Demostración, final

Demostremos que $B$ es acotado. Para cada $m$ en $\mathbb{N}$,

$$\|A_m\| = \left\| A_1 + \sum_{k=1}^{m-1} (A_{k+1} - A_k) \right\| \le \|A_1\| + \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-k-1} \le \|A_1\| + 1.$$

Dado $x$ en $V$,

$$\|A_m x\|_W \le (\|A_1\| + 1)\, \|x\|_V.$$

# Demostración, final

Demostremos que $B$ es acotado. Para cada $m$ en $\mathbb{N}$,

$$\|A_m\| = \left\| A_1 + \sum_{k=1}^{m-1} (A_{k+1} - A_k) \right\| \le \|A_1\| + \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-k-1} \le \|A_1\| + 1.$$

Dado $x$ en $V$,

$$\|A_m x\|_W \le (\|A_1\| + 1)\, \|x\|_V.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$ y usamos el hecho que la norma en $W$ es una función continua:

$$\|Bx\|_W \le (\|A_1\| + 1)\, \|x\|_V.$$

# Demostración, final

Demostremos que $B$ es acotado. Para cada $m$ en $\mathbb{N}$,

$$\|A_m\| = \left\| A_1 + \sum_{k=1}^{m-1} (A_{k+1} - A_k) \right\| \le \|A_1\| + \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-k-1} \le \|A_1\| + 1.$$

Dado $x$ en $V$,

$$\|A_m x\|_W \le (\|A_1\| + 1) \|x\|_V.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$ y usamos el hecho que la norma en $W$ es una función continua:

$$\|Bx\|_W \le (\|A_1\| + 1) \|x\|_V.$$

Luego $\|B\| = N_4(B) \le \|A_1\| + 1.$

# La completez de $W$ es una condición necesaria

**Ejercicio.** Supongamos que $V, W$ son espacios normados, $V \neq \{0_V\}$, y el espacio $\mathcal{B}(V, W)$ es completo. Demostrar que $W$ es completo.

Sugerencia: usar el teorema de Hahn–Banach.

# Plan


1. Introducción
2. Espacio normado $\mathcal{B}(V, W)$
3. Completez de $\mathcal{B}(V, W)$
4. La norma de una composición

**Proposición**

Sean $V, W, X$ espacios normados complejos, $B \in \mathcal{B}(V, W)$, $A \in \mathcal{B}(W, X)$. Entonces

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

**Proposición**

Sean $V, W, X$ espacios normados complejos, $B \in \mathcal{B}(V, W)$, $A \in \mathcal{B}(W, X)$. Entonces

$$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|.$$

**Demostración.** Para cada $v$ en $V$,

$$\|(AB)v\|_X = \|A(B(v))\|_X \leq \|A\|\,\|Bv\|_W \leq \|A\|\,\|B\|\,\|v\|_V.$$

**Proposición**

Sean $V, W, X$ espacios normados complejos, $B \in \mathcal{B}(V, W)$, $A \in \mathcal{B}(W, X)$.

Entonces

$$\|AB\| \le \|A\| \, \|B\|.$$

**Demostración.** Para cada $v$ en $V$,

$$\|(AB)v\|_X = \|A(B(v))\|_X \le \|A\| \, \|Bv\|_W \le \|A\| \, \|B\| \, \|v\|_V.$$

Luego $\|AB\| = N_4(AB) \le \|A\| \, \|B\|$.